

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ილია რომანის ძე ლომიძე

**ოპერატორების  
უნიტარული და ორთოგონალური ინვარიანტები  
და მათი გამოყენება მათემატიკურ და ფიზიკურ  
ამოცანებში**

**დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა**

ფიზიკა-მათემატიკის დოქტორის  
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მეცნიერ-ხელმძღვანელები –

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. გ. ჭილაშვილი

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. ჯ. ჯავახიშვილი

თბილისი  
2009

## სარჩევი

გვერდი

|   |           |
|---|-----------|
| შესავალი.....   | 4         |
| თავი I. ინვარიანტთა თეორიის პრობლემატიკა.....   | 15        |
| §1.1. ისტორიული მიმოხილვა .....   | 15        |
| §1.2. ინვარიანტები და გეომეტრია.....  | 20        |
| §1.3. ინვარიანტები და ფიზიკა .....  | 26        |
| §1.4. სიმეტრიების გაფართოება. სუპერსივრცე.....  | 33        |
| §1.5. ფუნქციონალური დამოუკიდებლობა ბმებიან სისტემებში.....                              | 36        |
| <b>I თავის დასკვნები .....</b>  | <b>39</b> |
| თავი II. ოპერატორების ინვარიანტები და კლასიფიცირება .....                               | 40        |
| §2.1. ძირითადი ცნებები და დებულებები .....  | 40        |
| §2.2. მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული<br>ოპერატორის ინვარიანტები.....                   | 46        |
| §2.3. გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის<br>ინვარიანტები.....             | 49        |
| §2.4. არაერმიტული ოპერატორის ინვარიანტები.....  | 57        |
| §2.5. ნამდვილი ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტები.....                              | 67        |
| <b>II თავის დასკვნები .....</b>   | <b>72</b> |
| თავი III. ვანდერმონდის მატრიცის განზოგადებები<br>და მათი თვისებები.....                 | 73        |
| §3.1. ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცა .....   | 73        |
| §3.2. ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა .....                                   | 76        |
| §3.3. შემდგომი განზოგადებები და გამოყენებები .....                                      | 80        |
| §3.4. ვანდერმონდის ასოცირებული და ინდუცირებული მატრიცები<br>და მათი განზოგადებები ..... | 87        |
| <b>III თავის დასკვნები.....</b>   | <b>92</b> |

|   |            |
|---|------------|
| თავი IV. ეილერის B-ფუნქციის განზოგადება.....  | 93         |
| §4.1. ორი ცვლადის შემთხვევა .....   | 94         |
| §4.2. IV.1 თეორემიდან გამომდინარე შედეგები.....   | 97         |
| §4.3. მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციების ზოგიერთი თვისება.....                               | 103        |
| §4.4. $n \geq 3$ ცვლადის შემთხვევა .....  | 115        |
| §4.5. კარლსონის თეორემა და მისი შედეგები.. ..   | 122        |
| <b>IV თავის დასკვნები.....</b>  | <b>128</b> |
| თავი V. ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტების<br>ფიზიკაში გამოყენების მაგალითები..... | 129        |
| §5.1. ასიმეტრიული მყარი სხეულის ბრუნვა.....   | 129        |
| §5.2. რელატვისტური ბრუნვა.....  | 133        |
| §5.3. ბაროქრონული დინება.....   | 141        |
| §5.4. ბაროქრონული დინების რეჟიმები და ევოლუცია.....                                     | 148        |
| <b>V თავის დასკვნები .....</b>  | <b>161</b> |
| <b>დისერტაციაში მიღებული შედეგები და დასკვნები.....</b>                                 | <b>162</b> |
| დამატება A.....   | 165        |
| 1. $R_x(m,a,b,c)$ რაციონალური ფუნქციის გამოთვლა .....                                   | 165        |
| 2. $B(\alpha,\beta,\gamma)$ -ფუნქციის ანალიზური თვისებები .....                         | 166        |
| 3. განზოგადებული ჰგ ფუნქციები.....  | 167        |
| 4. ინტეგრალები. ცხრილი 3, ცხრილი 4.....   | 169        |
| 5. ფრონსკიანები. ცხრილი 5.....  | 172        |
| 6. მრავალი ცვლადის მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციები. ცხრილი 6.....                                | 173        |
| დამატება B.....   | 178        |
| 1. წინადადება 5.1 და 5.2 დამტკიცება.....  | 178        |
| 2. $[u_{l,k}(\vec{x},t)]$ მატრიცის ინვარიანტები.....                                    | 179        |
| <b>ლიტერატურა .....</b>   | <b>181</b> |

## შესავალი

თეორიულ ფიზიკაში გეომეტრიული იდეების გამოყენებას დიდი ისტორია აქვს და ძალიან ფართოდ არის გავრცელებული. სხვადასხვა განზომილებისა და მათემატიკური შინაარსის აბსტრაქტულ სივრცეებს იყენებენ წერტილისა და უწყვეტი გარემოს მექანიკაში (კონფიგურაციული  $n$ -განზომილებიანი სივრცე;  $2n$ -განზომილებიანი ფაზური სივრცე [1-2]), ელექტროდინამიკაში (ფსევდოეკვიდური ოთხ- და მრავალგანზომილებიანი სივრცეები [3]), მიკროფიზიკასა და კოსმოლოგიაში (ჰილბერტის მდგომარეობათა სივრცე [4-5], სუპერ-სივრცე [6]) და სხვა. ამ სივრცეებში მოქმედი გარდაქმნების ჯგუფების [7] შესწავლა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ შესაბამისი ფიზიკური სისტემის დამახასიათებელი სიმეტრიები, გამოვყოთ გარდაქმნათა კლასები, რომლებიც ინვარიანტულს ტოვებს ამ სისტემის ფიზიკურ პარამეტრებს, ვიპოვოთ ფიზიკური სიდიდეების ტრანსფორმაციული თვისებები უფრო ფართო ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ, ავაგოთ ინვარიანტული მათემატიკური გამოსახულებები, რომლებითაც უნდა აიწერებოდეს გაზომვადი სიდიდეები, მოვძებნოთ დადგენილ სიმეტრიებთან დაკავშირებული მუდმივობის კანონები [4], რაც სისტემის დროში ევოლუციის ამოცანის გადაწყვეტის საფუძველს შეადგენს.

დიდი მნიშვნელობა აქვს სხვადასხვა მათემატიკური მოდელების ჩარჩოებში მიღებული შედეგების ინტერპრეტაციას, ამ მოდელებს შორის კავშირების დადგენას და ფიზიკურად ერთმანეთის ტოლფასი, ექვივალენტური მოდელების კლასების პოვნას. ცნობილი მაგალითია კვანტური მექანიკის შრედინგერისეული და ჰაიზენბერგისეული სურათების უნიტარული ექვივალენტობა [8a,b].

1980-იანი წლების ბოლოს სუპერსიმების თეორიის ერთ-ერთი შემქმნელი ჯონ შვარცი ოცნებობდა, რომ მოხერხდებოდა თეორიის რამდენიმე ალტერნატიული ვარიანტის ტოლფასობის დამტკიცება, რაც მოგვცემდა ერთ თანმიმდევრულ თეორიას, რომელიც მთლიანად აღწერს ფუნდამენტურ ფიზიკას [9]. 1995 წელს ედვარდ უიტენმა აღმოაჩინა, რომ ყველა ეს თეორია მიიღება, როგორც ზღვრული შემთხვევა, ერთი ზოგადი თეორიიდან – ე.წ.  $11$ -განზომილებიანი  $M$ -თეორიიდან, რომელიც ამჟამად სწრაფად ვითარდება [10].

ფართო გამოყენება აქვს აბსტრაქტულ სივრცეში კოორდინატთა არჩევის თავისუფლებას და ამ გზაზე გამარტივებული მათემატიკური აღწერის შესაძლებლობას. ცხადია, ეს დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადთა შესაბამისი გარდაქმნა არ ცვლის ფიზიკურ შედეგს. მაგალითად, გაერთიანებული ელექტრო-სუსტი ურთიერთქმედების გლეშოუ-ვაინბერგ-სალამის მოდელის გადანორმვადობა მტკიცდება სპონტანურად დარღვეული სიმეტრიის მქონე თეორიის ყალიბრული ინვარიანტობის გამოყენებით [11], სიმეტრიულ მდგომარეობაში; მიღებული შედეგი მართებული რჩება ყალიბრების შეცვლის შემდეგაც.

უდიდესი მნიშვნელობა აქვს თანაფარდობებს ინვარიანტულ სიდიდეთა შორის – სწორედ ასეთი თანაფარდობები, ფ. კლაინის იდეის თანახმად, შეადგენს გეომეტრიულ თეორემებს [12], [13]. იგივე შეიძლება ითქვას ფიზიკის კანონების შესახებაც. ინვარიანტობის (უცვლელობის) მოთხოვნა ფიზიკაში ხშირად ჩანაცვლებულია უფრო ფართო – ზოგადი კოვარიანტობის მოთხოვნით, რაც უზრუნველყოფს ნაპოვნი თანაფარდობების შესრულებას აბსტრაქტულ სივრცეში, დამოუკიდებლად კოორდინატთა კონკრეტული არჩევისგან. ფაქტობრივად, ლაპარაკია ფარდობითობის პრინციპის გაფართოებულ გაგებაზე: აინშტაინის (გალილეის) ფარდობითობის პრინციპი მოითხოვს ფიზიკური (მექანიკური) მოვლენების ინვარიანტობას (შესაბამისად, მათი აღმწერი თანაფარდობების – ფიზიკური კანონების – კოვარიანტობას) სივრცე-დროში ლორენცის (გალილეის) გარდაქმნების მიმართ. მაგრამ ცნობილია და ხშირად გამოიყენება უფრო ფართო გარდაქმნათა ჯგუფებიც – პუანკარეს,  $SU(n)$ , სუპერსიმეტრიული გლობალური და ლოკალური ჯგუფები. ამ ჯგუფების მიმართ ინვარიანტული სიდიდეებისა და მათ შორის თანაფარდობების პოვნა შეადგენს ფიზიკის განვითარების მთავარ მიმართულებას.

ფიზიკური შინაარსის მქონე ნებისმიერი თანაფარდობა კოვარიანტული უნდა იყოს არჩეული ჯგუფის მიმართ, ე.ი. ასეთი თანაფარდობა უნდა აკავშირებდეს ერთნაირი ტრანსფორმაციული თვისებების მქონე სიდიდეებს, ამასთან, ამ სიდიდეების კოეფიციენტები ჯგუფის ინვარიანტებს უნდა წარმოადგენდეს. სწორედ ამ კოეფიციენტების პოვნა, მათი თვისებების გამოკვლევა და სხვა ინვარიანტულ სიდიდეებთან კავშირების დადგენა არის ფიზიკური გამოკვლევის ძირითადი მიზანი. თავის ერთ-ერთ უკანასკნელ საჯარო ლექციაზე საქ. მეცნიერებათა აკადემიის ფიზიკის ინსტიტუტში (ამჟამად ე. ანდრონიკაშვილის ფიზიკის ინსტიტუტი) 1972 წლის მარტში აკადემიკოსმა ვაგან მამასახლისოვმა ჩამოაყალიბა ზემოთ მოყვანილი მოსაზრება და მოიყვანა ამ მოსაზრების საილუსტრაციო რამდენიმე მაგალითი. კერძოდ, მან განიხილა ფარადეის ელექტროლიზის კანონის აღმოჩენისა და შესწავლის ისტორია, როგორც ინვარიანტული კოეფიციენტების პოვნისა და მათი სხვა, ასევე ინვარიანტულ კოეფიციენტებთან დაკავშირების თანმიმდევრული ჯაჭვი [14]. ამ ჯაჭვის ბოლო ე. მამასახლისოვის ლექციაში იყო ფარადეის უნივერსალური მუდმივა  $F = eN_A$ , რომელიც, როგორც ცნობილია, გამოისახება  $e$  ელემენტარული მუხტითა და ავოგადროს  $N_A$  რიცხვით. დღევანდელი თვალთახედვით, ეს ჯაჭვი დაგრძელდა – მომავალი ფიზიკის ამოცანაა  $e$  ელექტრული მუხტის (უფრო ზუსტად,  $\alpha = ke^2/(2\pi\hbar c) \approx 10^{-3}$  უგანზომილებო უნივერსალური კონსტანტის) გამოთვლა ურთიერთქმედებათა გაერთიანებული თეორიის ჩარჩოებში.

ფიზიკურ ამოცანებში განსაკუთრებით ხშირად გვჭირდება წრფივ ვექტორულ სივრცეში მოქმედი ოპერატორების ინვარიანტების პოვნა უნიტარული  $U(n)$  ან ორთოგონალური  $O(n)$  გარდაქმნების მიმართ. გარდაქმნათა ეს ჯგუფები გვხვდება კვანტურ თეორიაში, კლასიკურ არარელატივისტურ და რელატივისტურ მექანიკაში, ელექტროდინამიკაში, ჰიდროდინამიკაში და ა.შ. ამ ჯგუფების გამორჩეული მნიშვნელობა განისაზღვრება იმით, რომ ორივე ეს ჯგუფი ინახავს სკალარულ ნამრავლს, შესაბამისად, ერმიტულს ან ევკლიდურს.  $O(3)$  და  $O(4)$  ჯგუფები აღწერს ქმედების ფუნქციონალის სივრცე-დროით სიმეტრიებს და, ნიოტერის თეორემის [2], [4] თანახმად, დაკავშირებულია ამ სიმეტრიებიდან გამომდინარე ადიტიურ შენახვად სიდიდეებთან.

მნიშვნელოვანია შენახვად სიდიდეთა – დინამიური სისტემის მოძრაობის ინტეგრალთა შორის აღგებრულად დამოუკიდებელი სიდიდეების გამოყოფა. საზოგადოდ, ეს რთული ამოცანაა და ზოგადი სახით ამოხსნილია მხოლოდ ზოგიერთი ჯგუფისათვის [13], [15]. ორთოგონალური ჯგუფის მიმართებაში ამ ამოცანას იხილავს მრავალი ავტორი [16]-[39]. ტრადიციულად, განიხილება ოპერატორის (მატრიცის) მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტები. ასეთი სახის სამგანზომილებიან ინვარიანტებს იყენებენ, მაგალითად, [27]-[30] შრომების ავტორები ჰიდროდინამიკის ზოგიერთ ამოცანაში.

ინვარიანტების უფრო სრულყოფილი სისტემა ( $O(3)$  ჯგუფის მიმართ) გამოყენებულია შრომებში [31-33], მონოკრისტალში მაგნიტური იონის გარემომცველ ბირთვებთან ზენაზი ურთიერთქმედების შესასწავლად. ამ შრომებში გამოყენებულია ოპერატორის (მატრიცის) დაშლა დაუყვანად ტენზორულ ნაწილებად და ცალ-ცალკეა შესწავლილი ამ ნაწილების მახასიათებელი პოლინომების კოეფიციენტები (ოთხი დამოუკიდებელი ინვარიანტი). ცნობილია [19], რომ ინვარიანტების არც ეს სისტემა არაა სრული; მისი შევსება შესაძლებელია, მაგალითად, [18]-[20], [23]-[24], [39a, b] შრომებში ნაჩვენები გზით. მაგრამ ზოგად, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ამოცანა რთულდება და ამ შრომებში მითითებული მეთოდი არ გამოდგება. მონოგრაფიაში [20] გაანალიზებულია ამ გართულებების ხასიათი.

ასევე მნიშვნელოვანია არაკომუტირებად ოპერატორთა (მატრიცათა) კრებულის დამოუკიდებელ ინვარიანტთა სრული სისტემის აგება. მსგავსი ხასიათის ფიზიკური ამოცანები გვხვდება ისეთი კვანტურ-მექანიკური სისტემების შესწავლისას, რომელნიც აიწერება სიმკვრივის მატრიცით [8a]. მონოგრაფიაში [22] არაკომუტირებად ოპერატორთა კრებულის ერთობლივ ინვარიანტებად არჩეულია ამ ოპერატორთა (მრავალი ცვლადის) მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტები. დისერტაციის II თავში ნაჩვენებია, რომ ასე აგებული ინვარიანტების სისტემა არ არის სრული.

ამოცანა ბოლომდე გადაწყვეტილია ორიგინალურ შრომებში [40]-[41]. ამავე შრომებში ნაპოვნია არასიმეტრიული ნამდვილი ოპერატორების (მატრიცების) ორთოგონალური ექვივალენტობისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობები მათი ინვარიანტების გამოყენებით, რაც ინვარიანტთა თეორიის კლასიკურ ამოცანას წარმოადგენს და უკანასკნელ დრომდე არ იყო სრულყოფილად შესწავლილი. არსებობდა მხოლოდ ასეთი კლასიფიკაციისათვის საკმარისი ინვარიანტების რაოდენობის შეფასება ზემოდან:  $N \leq 2^{2n^2}$  (კ. პირსი, 1962, [17a,b]), მაგრამ ეს შეფასება გადაჭარბებულია, როგორც ეს აღნიშნა თვით პირსიმ [17a]. შრომაში [40] ნაპოვნია შეფასება  $N \leq n^2 + 1$  და დამტკიცებულია, რომ, საზოგადოდ, ამ შეფასების გაუმჯობესება არ შეიძლება. შრომაში [41] ანალოგიური საკითხი შესწავლილია გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორისათვის.

ზოგადი სახის ოპერატორთა (მატრიცათა) ინვარიანტების სრული სისტემის აგება ბუნებრივად უკავშირდება ალგებრის კიდევ ერთ ფუნდამენტურ ამოცანას – ამ ოპერატორის (მატრიცის) კანონიკური ფორმის დადგენას. ამ მიმართულებით მიღწეული შედეგები დეტალურად არის აღწერილი ფ. განტმახერის ენციკლოპედიური ხასიათის მონოგრაფიაში [42]. ასევე დეტალურად არის გაშუქებული ოპერატორთა წყვილების მსგავსების საკმარისი და აუცილებელი პირობები. აქ გამოყენებული მეთოდი ემყარება ვეიერშტრასის ელემენტარულ გამყოფთა თეორიას, რომელიც, როგორც ცნობილია, არ გულისხმობს ოპერატორთა უნიტარულ (ან ორთოგონალურ) მსგავსებას. იგივე შენიშვნა უნდა გაკეთდეს ოპერატორთა მატრიცების ჟორდანის ნორმალური ფორმის შესახებ: მოცემული მატრიცის ამ კანონიკურ ფორმაზე დაყვანა, საზოგადოდ, შესაძლებელია არაუნიტარული (არაორთოგონალური) გარდაქმნით, რაც არ გვაძლევს საშუალებას ვიპოვოთ შესაბამისი ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტები მისი მატრიცის ჟორდანის ნორმალური ფორმის გამოყენებით [34]-[38].

გაკეთებული შენიშვნა უფრო ნათელი ხდება გეომეტრიული მიდგომისას. მატრიცით ოპერატორის აღწერა ნიშნავს ამ ოპერატორის განხილვას რომელიმე (ვექტორულ) ბაზისში. უნიტარულ (ეკვილიდურ) სივრცეში, სადაც განმარტებულია ვექტორთა სკალარული ნამრავლი, ჟორდანის ნორმალური ფორმა მოცემული ოპერატორის მატრიცას ექნება, საზოგადოდ, არაორთონორმირებულ ბაზისში. ეს ნიშნავს, რომ ორ ოპერატორს, რომელთაც აქვს ელემენტარული გამყოფების ერთნაირი სისტემები, ექნებათ ერთნაირი ჟორდანის ნორმალური ფორმის მატრიცები, ოღონდ, საზოგადოდ, სხვადასხვა, არაორთონორმირებულ ბაზისებში, რომელნიც, გარდა ამისა, არ მიიღება ერთი მეორედან უნიტარული (ორთოგონალური) გარდაქმნებით.

ამრიგად, უნიტარულ  $U^n$  (ეკვილიდურ  $E^n$ ) სივრცეში უფრო ბუნებრივია განვიხილოთ  $P: U^n \rightarrow U^n$  ოპერატორის ( $P: E^n \rightarrow E^n$  ოპერატორის) კანონიკური ფორმა  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში არჩეულ მეტრიკულ  $g_{kl}$  ტენზორთან წყვილში და ასეთი ოპერატორების კლასიფიცირება მოვახდინოთ ( $P, [g_{kl}]$ ) წყვილებით, სადაც  $P$  აღნიშნავს  $P: U^n \rightarrow U^n$  ოპერატორის მატრიცას არჩეულ ბაზისში. თუ მოცემული ოპერატორი  $P: U^n \rightarrow U^n$  არ არის ნორმალური [42], მაშინ  $g_{kl}$  ტენზორის კომპონენტები განისაზღვრება ამ ოპერატორის სტრუქტურით და, მის საკუთარ რიცხვებთან ერთად, შეიცავს “ობიექტურ”, უნიტარული (ორთოგონალური) გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულ ინფორმაციას  $P: U^n \rightarrow U^n$  ოპერატორის შესახებ. შესაბამისად, ამ ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების რაოდენობა აღემატება სივრცის განზომილებას.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ზოგადი სახის  $P: U^n \rightarrow U^n$  ( $P: E^n \rightarrow E^n$ ) ოპერატორის კანონიკური ბაზისის და ამ ბაზისში ოპერატორის კანონიკური მატრიცის აგება ახლებურ გააზრებას მოითხოვს. განსაკუთრებით საინტერესოა ოპერატორები, რომელთა ერმიტული (სიმეტრიული) ნაწილის სპექტრი გადაგვარებულია და შესაბამისი საკუთარი ქვესივრცეების განზომილებები აღემატება ერთს. ეს განზომილებები ამ ოპერატორის დამახასიათებელ პარამეტრებად უნდა ჩაითვალოს. ასეთი ოპერატორების დამოუკიდებელ ინვარიანტთა

რიცხვის გამოთვლა საინტერესო კომბინატორულ ამოცანებზე დაიყვანება, რომლებსაც, გარდა ოპერატორების კლასიფიკაციის ამოცანაში გამოყენებისა, დამოუკიდებელი მეცნიერული ღირებულებაც გააჩნია.

წინამდებარე დისერტაციაში ნაჩვენებია (იხ. [41], [43], [44a, b], [45a, b], [46a, b], [47]), რომ არსებობს ღრმა კავშირი ერმიტული ოპერატორის დამოუკიდებელ პოლინომურ ინვარიანტებსა და ისეთ მათემატიკურ კონსტრუქციებს შორის, როგორცაა ლაგრანჟის და ერმიტის ინტერპოლაცია, თანაფარდობები ალგებრული ფუნქციის ნულებსა და კოეფიციენტებს შორის (ვიეტის თეორემის ანალოგი), ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული (ჰგ) ფუნქციები, თანაფარდობები ამ ფუნქციებს შორის და სხვა.

შრომაში [45a, b] განზოგადებულია ეილერის ფორმულა B-ფუნქციისათვის; განზოგადებული (n+1)-პარამეტრიანი B-ფუნქცია შემოღებულია შრომებში [44a, b] და შესწავლილია შრომებში [45a, b] და [47]. როგორც ცნობილია, ეილერის ბეტა-ფუნქცია  $B(\alpha, \beta)$  გამოიყენება ვენეციანოს დუალურ მოდელში [48], [49] და სიმების და სუპერსიმების თეორიაში [6]. ამდენად, დისერტაციაში ნაპოვნი განზოგადებები, შესაძლოა, სასარგებლო აღმოჩნდეს თეორიული ფიზიკის შესაბამისი მიმართულებებით მიმდინარე კვლევებში (იხ. [10], [50-52]).

**სამუშაოს მიზანი:** მოცემული სამუშაოს მიზანს წარმოადგენს სასრულგანზომილებიან უნიტარულ და ევკლიდურ სივრცეებში მოქმედი ოპერატორების უნიტარული და ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური ბაზისის აგება და ამ ოპერატორებისათვის უნიტარული და ორთოგონალური მსგავსების კრიტერიუმის დადგენა; ნაპოვნი თანაფარდობებიდან გამომდინარე მათემატიკური და ფიზიკური შედეგების შესწავლა.

**დასახული მიზნის მისაღწევად** აუცილებელი იყო შემდეგი პრობლემების გადაჭრა:

- ზოგადი სახის ოპერატორების კანონიკური ორთონორმირებული ბაზისის პოვნა;
- პოლინომური ინვარიანტების გამოთვლა კანონიკურ ბაზისში და მათ შორის მინიმალური საბაზისო სისტემის პოვნა;
- ინვარიანტთა აგებული სიმრავლის ელემენტების პოლინომური და ფუნქციონალური დამოუკიდებლობის დამტკიცება;
- ფუნქციონალური დამოუკიდებლობის საჩვენებლად აუცილებელი მათემატიკური კონსტრუქციების შემუშავება; კერძოდ:
- ვანდერმონდის მატრიცის და მასთან დაკავშირებული მატრიცების ფართო განზოგადება და მათი თვისებების შესწავლა;
- შემოღებული მათემატიკური ცნებებიდან გამომდინარე შედეგების შესწავლა და მათემატიკის სხვა მიმართულებებთან მათი მიმართების დადგენა.

**მეცნიერული სიახლე და პრაქტიკული მნიშვნელობა** მდგომარეობს შემდეგში:

1. შემოღებულია დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭირო ახალი მათემატიკური ცნებები და შემუშავებულია შესაბამისი ახალი მათემატიკური აპარატი;

2. აგებულია მინიმალური პოლინომური ბაზისი სასრულგანზომილებიან უნიტარულ და ევკლიდურ სივრცეებში მოქმედი ოპერატორების უნიტარული და ორთოგონალური ინვარიანტებისათვის და დადგენილია ამ ოპერატორების უნიტარული და ორთოგონალური მსგავსებისათვის საკმარისი და აუცილებელი, დამოუკიდებელი ინვარიანტული პირობები.

3. განზოგადებულია ეილერის ბეტა-ფუნქცია და დამტკიცებულია ეილერის ფორმულის შესაბამისი თანაფარდობა ამ ფუნქციისათვის; მიღებული თანაფარდობები წარმოადგენს მრავალი ახალი საინტერესო ფორმულის წყაროს.

4. ნაჩვენებია, რომ შემოღებული ცნებებისა და დამტკიცებული თანაფარდობების გამოყენებით შეიძლება ამოიხსნას თეორიული ფიზიკის ამოცანების ფართო წრე, კერძოდ, უწყვეტი გარემოს ფიზიკაში. ნაპოვნია ახალი და დაზუსტებულია ცნობილი თანაფარდობები ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის. ანალიზურად გამოთვლილია რამდენიმე ახალი ინტეგრალი, მათ შორის, ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციიდანაც.

**დაცვაზე გამოტანილია შემდეგი ძირითადი შედეგები და დებულებები:**

1. შემოღებულია ფუნქციონალურად პირობითად დამოუკიდებელი ფუნქციების ცნება და დამტკიცებულია თეორემა ფუნქციების ფუნქციონალურად პირობითი დამოუკიდებლობისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობების შესახებ.

2.  $n$ -განზომილებიან უნიტარულ  $U^n$  (ეკვიდურ  $E^n$ ) სივრცეში მოქმედი, გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული)  $P$  ოპერატორისათვის ნაპოვნი მისი დამახასიათებელი დამოუკიდებელი პარამეტრების მინიმალური რაოდენობა  $n(P)$  და ნაჩვენებია, რომ ეს რაოდენობა ემთხვევა რამზის რიცხვს. ნაპოვნი გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში. ნაპოვნია ორი ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები.

3.  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში ზოგადი სახის ოპერატორისათვის აგებულია კანონიკური ბაზისი; ცხადი სახით აგებულია ამ ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმა. აგებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების მინიმალური სრული კრებული – პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი; დამტკიცებულია თეორემა ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმისა და პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ურთიერთცალსახა შესაბამისობის შესახებ. დამტკიცებულია აგებული პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ელემენტთა ფუნქციონალური დამოუკიდებლობა.

4. ნაპოვნია ზოგადი სახის ორი ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები; ამასთან, გაუმჯობესებულია პირსის შეფასება ასეთი მსგავსებისათვის საკმარისი პირობების რაოდენობის შესახებ (ჩვენს მიერ ნაპოვნი შეფასებაა  $N \leq n^2 + 1$ , ნაცვლად პირსის მიერ მოცემული  $N \leq 2^{2n^2}$  რაოდენობისა) და ნაჩვენებია, რომ ზოგად შემთხვევაში ეს შეფასება არ შეიძლება გაუმჯობესდეს.

5. შემოღებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების მატრიცა და ნაჩვენებია, რომ ამ მატრიცის სტრუქტურა ემთხვევა ოპერატორის კანონიკური მატრიცის სტრუქტურას.

6. ნაპოვნია სხვადასხვა სიმეტრიის მქონე ნამდვილი ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობები მათი ინვარიანტების ბაზისების ტერმინებში; ბოლომდე გადაწყვეტილია ოპერატორთა ასეთი წყვილების უნიტარული (ორთოგონალური) კლასიფიცირების ამოცანა.

7. განმარტებულია ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცა და ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა; ჯერადობების ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობებისათვის გამოთვლილია ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტი. დამტკიცებულია, რომ ეს მატრიცა დადებითადაა განსაზღვრული, როცა სავსებით დადებითია შესაბამისი ვანდერმონდის განზოგადებული მატრიცა. ნებისმიერი მატრიცის  $r$ -ასოცირებული და  $r$ -ინდუცირებული მატრიცების ანალოგიურად, აგებულია ე.წ. განზოგადებული  $r$ -ინდუცირებული მატრიცა. ვანდერმონდის განზოგადებული  $r$ -ინდუცირებული მატრიცის დეტერმინანტი გამოთვლილია ცხადი სახით.

8. დამტკიცებულია ვიეტის თეორემის ანალოგიური თანაფარდობა ნამდვილი ცვლადის ხარისხთა ჯამისათვის, როცა ხარისხის მაჩვენებლები არაა მთელი. მისი გამოყენებით გამოთვლილია ლაგრანჟის ელემენტარულ ინტერპოლაციურ მრავალწევრთა შემცველი სასრული ჯამი.



9. ნაჩვენებია ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცის კავშირი ზოგიერთ მნიშვნელოვან სპეციალურ ფუნქციასთან, კერძოდ, ეილერის B-ფუნქციასთან და ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ (ჰგ) ფუნქციებთან, რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ მათემატიკურ და ფიზიკურ ამოცანებში. შემოღებულია განზოგადებული,  $(n+1)$  პარამეტრზე დამოკიდებული B-ფუნქციის განმარტება და შესწავლილია მისი თვისებები. ნაჩვენებია ამ ფუნქციის თანაბარი შემოსაზღვრულობა მისი ყოველი არგუმენტის შესაბამის კომპლექსურ სიბრტყეზე და დამტკიცებულია ეილერის ფორმულის მრავალგანზომილებიანი ანალოგი.

10. დამტკიცებულია თეორემა განზოგადებულ B-ფუნქციაში შემავალი ერთი და მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციათა განსაკუთრებულობათა შეკვეცის შესახებ.

11. ნაპოვნია ახალი თანაფარდობები  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციათა შორის. დაზუსტებულია მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციების დამაკავშირებელ თანაფარდობათა რაოდენობა და მოცემულია ამ თანაფარდობათა სრული სისტემა ცხადი სახით. ერთი ცვლადის შემთხვევაში ეს თანაფარდობები ემთხვევა გაუსის ცნობილ ფორმულებს, ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში იძლევა 38 ფორმულას აპელის ჰგ ფუნქციისათვის. ეს შედეგი განსხვავდება აპელისა და კამპე დე ფერიეს მონოგრაფიაში დეკლარირებული რიცხვისგან ამ თანაფარდობათა რაოდენობისათვის (56 თანაფარდობა).

12.  $n=2$  შემთხვევაში ნაჩვენებია განზოგადებული B-ფუნქციის კავშირი გაუსის ჰიპერგეომეტრიული განტოლების კუმერისეული ამონახსნების ვრონსკიანთან. ამ კავშირის გამოყენებით ცხადი სახით გამოთვლილია კუმერის ამონახსნების ყველა არატრივიალური წყვილის ვრონსკიანი. ნაპოვნი თანაფარდობები გამოყენებულია სპეციალური და ელემენტარული ფუნქციების ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის ანალიზურად გამოთვლისათვის. მიღებული შედეგების ნაწილი ახალია და არ ფიგურირებს ცნობარებში, მათ შორის ელექტრონულშიც.

13. სასრული სახით გამოთვლილია სპეციალური ფუნქციების შემცველი ზოგიერთი მწკრივი; მიღებულია ზაალშუტცის ფორმულის ტიპის ახალი თანაფარდობები და რამდენიმე ახალი თანაფარდობა განზოგადებული ჰგ ფუნქციებისათვის.

14. ორთოგონალური ინვარიანტების სრული მინიმალური კრებული გამოყენებულია ფიზიკური სისტემების დინამიკის აღსაწერად. სამგანზომილებიანი ინვარიანტებით ჩაწერილია განტოლებები აბსოლუტურად მყარი სხეულის ბრუნვისათვის, რომელიც მართებულია კოორდინატთა ნებისმიერ ორთონორმირებულ სისტემაში და არა მხოლოდ ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში; კერძო შემთხვევებში ეს განტოლება გვაძლევს მოძრაობის ინტეგრალებს თავისუფალი ბზრიალასთვის – ბრუნვის კინეტიკურ ენერჯიას და იმპულსის მომენტის კვადრატს და განსაზღვრავს კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულებას.

15. რელატივისტურად მბრუნავი სისტემებისათვის გამოთვლილია სისტემის რელატივისტური ენერჯია და იმპულსის მომენტი, რადიუსზე დამოუკიდებელი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას, სისტემაში მასის სხვადასხვა განაწილებისათვის. ნაჩვენებია, რომ ორივე ეს სამგანზომილებიანი ინვარიანტი რჩება სასრული, როცა მბრუნავი სისტემის ეკვატორის სიჩქარე მიისწრაფის სინათლის სიჩქარისკენ, გარდა იმ შემთხვევებისა, როცა ეკვატორის მიდამოში მასის მნიშვნელოვანი ნაწილია ლოკალიზებული. აგებულია ასეთი სისტემების რელატივისტური ჰამილტონიანი. შესწავლილია ვიწრო თხელი რგოლის დინამიკა რელატივისტური ბრუნვისას.

16. აგებულია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემა იდეალური სითხის ბაროქრონული დინებისათვის ჰიდროდინამიური სიჩქარის იაკობის

მატრიცის ორთოგონალური ინვარიანტების ტერმინებში. ეს შედეგი მიღებულია დისერტაციაში დამტკიცებული ზოგადი ხასიათის თეორემის საფუძველზე, რომელიც განსაზღვრავს იაკობის მატრიცისა და მისი ორთოგონალური ინვარიანტების დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დამოკიდებულების კანონს.

17. დამტკიცებულია, რომ არსებობს ბაროქრონული დინების მხოლოდ ორი რეჟიმი – პოტენციური, ან სოლენოიდური და ნაპოვნია იაკობის მატრიცის ყველა დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტის დროზე დამოკიდებულების კანონი ორივე რეჟიმში.

18. ბაროქრონული დინებისათვის ამოხსნილია ეილერის სამგანზომილებიანი ჰიდროდინამიური განტოლებების სისტემის ტოლფასი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა და ნაპოვნია აირის ჰიდროდინამიური სიჩქარის და სიმკვრივის დამოკიდებულება დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დინების ორივე შესაძლო რეჟიმში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ პოტენციური ბაროქრონული დინებისას ჰიდროდინამიური სიჩქარის დამოკიდებულება რადიუს-ვექტორზე (ნებისმიერად არჩეული კოორდინატთა სათავეს მიმართ) აიწერება ჰაბლის არარელატივისტური კანონით.

19. ბაროქრონული სოლენოიდური დინების რეჟიმში ნაპოვნია საკმარისი და აუცილებელი პირობები იმისა, რომ ეილერის ჰიდროდინამიური განტოლებების ამონახსნს ჰქონდეს მარტივი ან ორმაგი ტალღის სახე. ნაჩვენებია, რომ ბაროქრონული სოლენოიდური დინება იზობარულია.

20. ნაპოვნია პოლინომიური თანაფარდობები (სიზიგიები) იაკობის მატრიცის ინვარიანტებს შორის, როგორც პოტენციური, ასევე სოლენოიდური ბაროქრონული დინების რეჟიმში და ნაჩვენებია, რომ ეს თანაფარდობები არ იცვლება დროში, ე.ი. წარმოადგენს მოძრაობის პირველ ინტეგრალებს.

**დისერტაციის სტრუქტურა და შინაარსი.** დისერტაცია შეიცავს შესავალს, ხუთ თავს, დასკვნას, ორ დამატებას და 171 დასახელებისგან შედგენილ (154 წყაროდ დაჯგუფებულ) ლიტერატურის სიას. ორიგინალური შედეგები წარმოდგენილია I-V თავებში და დამატებებში. ნაშრომის საერთო მოცულობაა 187 ნაბეჭდი გვერდი, მათ შორის 12 ნახაზი და 6 ცხრილი.

**შესავალში** დასაბუთებულია გამოკვლევის შერჩეული მიმართულების აქტუალურობა, რაც განპირობებულია ინვარიანტების მეთოდის ფართო გამოყენებით თეორიული ფიზიკის და მათემატიკის მრავალ ამოცანაში. ჩამოყალიბებულია ნაშრომის ძირითადი მიზანი, განსაზღვრულია მისი მეცნიერული სიახლე და მნიშვნელობა, დასაბუთებულია სადისერტაციო ნაშრომის მეცნიერული და პრაქტიკული ღირებულება, ჩამოთვლილია დაცვაზე წარმოდგენილი ძირითადი დებულებები. შესავალში აგრეთვე აღწერილია დისერტაციის სტრუქტურა, მოყვანილია მისი მოკლე შინაარსი, წარმოდგენილია ცნობები ნაშრომის აპრობაციისა და პუბლიკაციების შესახებ.

**პირველი თავი** ეძღვნება ინვარიანტთა თეორიის პრობლემატიკას და, ძირითადად, მიმოხილვითი ხასიათისაა (გარდა §1.5-ისა). აქ განხილულია ისტორიული ცნობები ინვარიანტთა თეორიის განვითარების ადრეული ეტაპებისა და თანამედროვე მიმართულებების შესახებ, ჩამოთვლილია ძირითადი შრომები და მიღწევები, რომლებმაც განაპირობეს მეცნიერების ამ დარგის განვითარება. ილუსტრირებულია ინვარიანტთა თეორიის კავშირი მათემატიკისა და თეორიული ფიზიკის სხვა თანამედროვე მიმართულებებთან, განმარტებულია ძირითადი ცნებები და ტერმინები. ამ თავის ბოლო პარაგრაფი §1.5 ორიგინალურია. აქ შემოღებულია პირობითად დამოუკიდებელი ფუნქციების ცნება და დამტკიცებულია თეორემა შესაბამისი კრიტერიუმის შესახებ, რაც იძლევა ბმებიანი სისტემების შესწავლის

საშუალებას ბმების ცხადი სახით ამოხსნის გარეშე (ე.ი. გამოსაკვლევი სისტემის სიმეტრიის შენარჩუნებით). ეს მეთოდი გამოყენებულია დისერტაციის მომდევნო თავებში.

დისერტაციის II-V თავებში მოცემული მასალა (გარდა §2.1 და §2.2-ისა) ორიგინალური ხასიათისაა. ორიგინალურია დამატებებში გატანილი შედეგებიც.

**მეორე თავი** შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან. §2.1 შეიცავს ძირითად ცნებებს, განმარტებებსა და დებულებებს ოპერატორთა ალგებრიდან, რომლებიც გამოიყენება შემდგომში: მსგავსი მატრიცები, საკუთარი რიცხვები და საკუთარი ვექტორები და მათი ძირითადი თვისებები, ოპერატორის მახასიათებელი მრავალწევრი, შეუღლებული ოპერატორი, მარტივი სტრუქტურის ოპერატორი, ნორმალური ოპერატორი და მისი კერძო შემთხვევები – თვითშეუღლებული (კომპლექსური), სიმეტრიული (ნამდვილი) და უნიტარული ოპერატორები, განმარტებულია ამ ოპერატორების კანონიკური ბაზისი და შესაბამისი კანონიკური მატრიცები. ყველა წინადადება ან დამტკიცებულია ტექსტში, ან მითითებულია შესაბამისი ლიტერატურული წყაროები. §2.2-ში განხილულია მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორები. დამტკიცებულია თეორემა მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის ე.წ. სპექტრალური წარმოდგენის შესახებ, რაც შემდგომში გამოყენებულია ოპერატორების (უნიტარული) კლასიფიცირებისათვის; თეორემა დამოუკიდებელი პოლინომური ინვარიანტების რაოდენობის შესახებ და ინვარიანტების პოლინომური ბაზისის შესახებ; მოცემულია ჰამილტონ-კელის ფუნდამენტური თეორემის [42] ფორმულირება. §2.3-ში შესწავლილია გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორები. ნაჩვენებია, რომ ასეთი ოპერატორის დამოუკიდებელი პოლინომური ინვარიანტების რაოდენობა აღემატება ერთმანეთისგან განსხვავებულ საკუთარ რიცხვთა რაოდენობას. დამტკიცებულია, რომ ორი ერმიტული ოპერატორების უნიტარული კლასიფიცირებისას გასათვალისწინებელია საკუთარ რიცხვთა გადაგვარების ჯერადობები. აგებულია პოლინომურ ინვარიანტთა მინიმალური სისტემა, რომელიც საკუთარი რიცხვების გადაგვარების ჯერადობების პოვნის საშუალებას იძლევა. ნაჩვენებია ამ ოპერატორის დამოუკიდებელი პოლინომური ინვარიანტების რაოდენობის კავშირი კომბინატორიკაში ცნობილ ე.წ. რამზის რიცხვთან [53], [54]. დამტკიცებულია, რომ ეს რიცხვი არ აღემატება სივრცის განზომილებას და ნაჩვენებია, რომ ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ ორ შემთხვევაში: ა) მარტივი სპექტრის შემთხვევაში, ე.ი. როცა ოპერატორის ყველა საკუთარი რიცხვის ჯერადობაა  $r_i=1$  და ბ) როცა ერთი საკუთარი რიცხვის ჯერადობაა  $r_1=2$ , ხოლო დანარჩენი საკუთარი რიცხვები მარტივია. ნაპოვნია აგრეთვე თანაფარდობები ოპერატორის ხარისხების კვალთა შორის, რომლებშიც გადაისახება საკუთარი რიცხვების გადაგვარებით დადებული ბმები. §2.4-ში განმარტებულია და აგებულია არაერმიტული ოპერატორის კანონიკური ბაზისი და შესაბამისი მატრიცის კანონიკური ფორმა. ნაჩვენებია, რომ ეს ბაზისი ერთადერთია (სივრცეში გლობალური ფაზური გარდაქმნის სიზუსტით), თუ ოპერატორის ერმიტულ ნაწილს აქვს მარტივი სპექტრი და, ოპერატორის კანონიკური ფორმიდან გამომდინარე, ნაპოვნია მისი დამოუკიდებელი ნამდვილი პარამეტრების (მაქსიმალური) რაოდენობა  $n^2+1$ . შემოღებულია მოცემული ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტებით შედგენილი მატრიცა – ინვარიანტების მატრიცა – და ნაჩვენებია, რომ მისი სტრუქტურა ემთხვევა ოპერატორის კანონიკური მატრიცის სტრუქტურას. ამაზე დაყრდნობით, ნაპოვნია ოპერატორის დამოუკიდებელ ინვარიანტთა მაქსიმალური რაოდენობა და დადგენილია ორი არაერმიტული ოპერატორის (ერმიტულ ოპერატორთა წყვილების) უნატარული მსგავსებისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობები მათი ინვარიანტების ტერმინებში. ნამდვილი ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტები შესწავლილია პარაგრაფში 2.5. ამ პარაგრაფში განმეორებულია §2.4-ში შესრულებული აგებები ნამდვილი სივრცის შემთხვევისათვის. ნაჩვენებია, რომ ორი ნამდვილი არასიმეტრიული ოპერატორის ორთოგონალური მსგავსებისათვის ზოგად შემთხვევაში საკმარისია  $n(n+1)/2$  ნამდვილი ინვარიანტის გამოთვლა და ნაპოვნია ეს ინვარიანტები.

**მესამე თავი** შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან და შეიცავს იმ ახალ მათემატიკურ ცნებებსა და თეორემებს, რომლებიც უზრუნველყოფს II თავში მოცემული დებულებების შესწავლასა და დამტკიცებას. §3.1-ში შემოღებულია ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის ცნება და ცხადი სახით გამოთვლილია მისი დეტერმინანტი ჯერადობების ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობებისათვის. §3.2-ში მოცემულია ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცის განმარტება და დამტკიცებულია, რომ ის განსაზღვრულია დადებითად ცვლადების დადებითი მნიშვნელობებისა და ჯერადობების ნებისმიერი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნატურალური მნიშვნელობებისათვის. იქვე დამტკიცებულია ვიეტის თეორემის ანალოგიური თანაფარდობა ნამდვილი ცვლადის ხარისხთა ჯამისათვის, როცა ხარისხის მაჩვენებლები არაა მთელი. ეს შედეგი გამოყენებულია §3.3-ში ლაგრანჟის ელემენტარული ინტერპოლაციური მრავალწევრების [55] შემცველი სასრული ჯამის გამოსათვლელად; ნაპოვნია კავშირი ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტსა და ეილერის B-ფუნქციას შორის. §3.4-ში შემოღებულია ვანდერმონდის ასოცირებული და ინდუცირებული მატრიცები და მათი განზოგადებები, რომელთა ელემენტები შედგება მოცემული მატრიცის მინორებისა (ასოცირებული მატრიცა) და პერმანენტებისგან [56-58] (ინდუცირებული მატრიცა) (იხ. აგრეთვე [59]). დასმულია ამოცანა ამ ცნებების განზოგადების შესაძლებლობის შესახებ იუნგის სხვა სქემებით [7] შედგენილი მატრიცებისთვის.

**მეოთხე თავი** ეძღვნება  $(n+1)$ -პარამეტრიანი  $B(r_0, \dots, r_n)$  ფუნქციის შესწავლას, რომელიც წარმოადგენს ეილერის B-ფუნქციის განზოგადებას და მის კავშირებს ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ (ჰგ) ფუნქციასთან. §4.1-ში დამტკიცებულია ეილერის ფორმულის ანალოგი  $B(r_0, r_1, r_2)$  ფუნქციისათვის

$$(შ.1) \quad B(r_0, r_1, r_2) = \Gamma(r_0)\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)/\Gamma(r_0 + r_1 + r_2)$$

არგუმენტების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის. §4.2-ში გამოთვლილია გაუსის ჰგ დიფერენციალური განტოლების [60], [61] ვრონსკიანები კუმერისეული ამონახსნების ყველა არატრივიალური წყვილისთვის. მიღებული შედეგები გამოყენებულია ინტეგრალების ანალიზური სახით გამოსათვლელად მათემატიკური ფიზიკის რიგი სპეციალური ფუნქციიდან და ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციიდან მაგალითად (იხ. დამატება B),

$$(შ.2) \quad \int_0^1 u^{-b}(1-u)^{b-1} \ln(1-zu) du = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[ \psi(b) + \gamma + \ln z + b^{-1} F(1, b; 1+b; 1-z) \right]$$

აგრეთვე ზოგიერთი მწკრივის და სასრული ჯამის ანალიზური სახით გამოსათვლელად. §4.3-ში განხილულია მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციების ზოგიერთი თვისება. ნაპოვნია ახალი თანაფარდობები აპელის ტიპის  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციებს შორის. დაზუსტებულია მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციათა დამაკავშირებელ თანაფარდობათა რაოდენობა და ცხადი სახით მოცემულია ამ თანაფარდობათა სრული სისტემა. ერთი ცვლადის შემთხვევაში ეს თანაფარდობები ემთხვევა გაუსის ცნობილ ფორმულებს, ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში იძლევა 38 ფორმულას აპელის ჰგ ფუნქციისათვის. გაანალიზებულია ამ განსხვავების მიზეზები ლიტერატურაში მოყვანილ [62] მონაცემებთან. §4.4-ში გაანალიზებულია ის გართულებები, რომლებსაც იწვევს  $B(r_0, \dots, r_n)$  ფუნქციაში ცვლადთა რაოდენობის ზრდა. ამ თავის ბოლო §4.5-ში, კარლსონის თეორემის [63-65] გამოყენებით, დამტკიცებულია ფორმულა

$$(შ.3) \quad B(r_0, \dots, r_n) = \prod \Gamma(r_j) / \Gamma(\sum r_j)$$

ცვლადთა ნებისმიერი რაოდენობის შემთხვევაში არგუმენტების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის [47]. ამ თანაფარდობიდან გამომდინარე, დამტკიცებულია თეორემა განზოგადებულ B-ფუნქციაში შემავალი ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების სინგულარობების შეკვეცის შესახებ.

*მეხუთე თავში* მოყვანილია ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტების ფიზიკაში გამოყენების მაგალითები. აქ, ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, იხილება მხოლოდ სამგანზომილებიან ნამდვილ ევკლიდურ სივრცეში მოქმედი ოპერატორები და მატრიცები. §5.1-ში ასიმეტრიული მყარი სხეულის ბრუნვა აღწერილია ინერციის სიმეტრიული ტენზორის და კუთხური სიჩქარის ანტისიმეტრიული II რანგის ტენზორის წყვილით და ნაჩვენებია, რომ მათი სამგანზომილებიანი ინვარიანტებით შეიძლება ჩაიწეროს ბრუნვის დინამიური განტოლება, რომელიც მართებულია კოორდინატთა ნებისმიერ ორთონორმირებულ სისტემაში და არა მხოლოდ ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში. კერძო შემთხვევებში ეს განტოლება გვაძლევს მოძრაობის ინტეგრალებს თავისუფალი ბზრიალასათვის – ბრუნვის კინეტიკურ ენერჯიას და იმპულსის მომენტის კვადრატს და განსაზღვრავს კუთხური სიჩქარის კვადრატის დროზე დამოკიდებულებას [66]. §5.2-ში რელატივისტურად მბრუნავი სისტემისათვის გამოთვლილია (რადიუსზე დამოუკიდებელი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას) სისტემის რელატივისტური ენერჯია და იმპულსის მომენტი, სისტემაში მასის განაწილების სხვადასხვა შემთხვევებისათვის. ნაჩვენებია, რომ ორივე ეს სამგანზომილებიანი ინვარიანტი რჩება სასრული მაშინაც, როცა მბრუნავი სისტემის ეკვატორის სიჩქარე მიისწრაფის სინათლის სიჩქარისკენ, გარდა იმ შემთხვევებისა, როცა ეკვატორის მიდამოში მასის მნიშვნელოვანი ნაწილია ლოკალიზებული. პარამეტრული სახით აგებულია ასეთი სისტემების რელატივისტური ჰამილტონიანი. შესწავლილია ასეთი სისტემების დინამიკა. §5.3-ში შესწავლილია იდეალური სითხის ბაროქრონული დინება [27]-[29]. აგებულია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემა ჰიდროდინამიური სიჩქარის იაკობის მატრიცის ორთოგონალური ინვარიანტების ტერმინებში [66]. ეს შედეგი მიღებულია ამ პარაგრაფში დამტკიცებული ზოგადი ხასიათის თეორემის საფუძველზე იაკობის მატრიცის და მისი ორთოგონალური ინვარიანტების დროით და სივრცით ცვლადებზე დამოკიდებულების კანონის შესახებ (თეორემა 5.1, შედეგები 5.1-5.3). ნაპოვნია მიღებული არაწრფივი განტოლებების განსაკუთრებული ამონახსნები, რომლებიც წარმოადგენს ზოგადი ამონახსნების მოძვლებებს. §5.4-ში ნაჩვენებია, რომ არსებობს ბაროქრონული დინების მხოლოდ ორი რეჟიმი – პოტენციური და სოლენოიდური. ნაპოვნია იაკობის მატრიცის ყველა დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტის დროზე დამოკიდებულების კანონი ამ რეჟიმებში (ცხრილი 1). ნაპოვნი თანაფარდობების გამოყენებით ბაროქრონული დინებისთვის ამოხსნილია ეილერის სამგანზომილებიანი ჰიდროდინამიური განტოლებების სისტემის ცოლფასი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა და ნაპოვნია ჰიდროდინამიური სიჩქარის და სიმკვრივის დამოკიდებულება დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დინების ორივე შესაძლო რეჟიმში. კერძოდ, ნაჩვენებია [66a, b], რომ პოტენციური ბაროქრონული დინებისას ჰიდროდინამიური სიჩქარის დამოკიდებულება რადიუს-ვექტორზე (ნებისმიერად არჩეული კოორდინატთა სათავის მიმართ) აიწერება ჰაბლის არარელატივისტური კანონით

$$(შ.4) \quad \vec{u}(t, \vec{r}) = \frac{\vec{r}}{t + t_0}.$$

ამავე პარაგრაფში ბაროქრონული სოლენოიდური დინების რეჟიმში ნაპოვნია საკმარისი და აუცილებელი პირობები იმისა, რომ ეილერის ჰიდროდინამიური განტოლებების ამონახსნს ჰქონდეს მარტივი ან ორმაგი ტალღის [27] სახე (თეორემა 5.4). ნაჩვენებია აგრეთვე, რომ ბაროქრონული სოლენოიდური დინება იზობარულია [30]. ნაპოვნია პოლინომური თანაფარდობები იაკობის მატრიცის ინვარიანტებს შორის (ცხრილი 2), როგორც პოტენციური, ასევე სოლენოიდური დინების რეჟიმში და ნაჩვენებია, რომ ეს თანაფარდობები არ იცვლება დროში, ე.ი. წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალებს.

**დასკნით ნაწილში** ჩამოყალიბებულია დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები.

დამატებებში გატანილია გამოთვლითი და დამხმარე ხასიათის საკითხები და სხვა მასალა, რომელიც არ არის უშუალოდ დაკავშირებული ძირითადი ტექსტის შინაარსთან.

**დამატება A** შედგება 6 პუნქტისგან. პუნქტში A.1 მიღებულია ზაალშუტცის ფორმულის ახალი ანალოგი [45a]. პუნქტში A.2 დამტკიცებულია თეორემა გაუსის ჰგ ფუნქციების განსაკუთრებულობების შეკვეცის შესახებ ეილერის განზოგადებულ  $B(\alpha, \beta, \gamma)$ -ფუნქციაში. პუნქტში A.3 დამტკიცებულია ახალი თანაფარდობა განზოგადებულ ჰგ (სასრულ) მწკრივებს შორის, რომელიც გამომდინარეობს დისერტაციის IV თავში გამოყვანილი ფორმულებიდან. პუნქტში A.4 თანაფარდობები გაუსის მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციათა და მათ წარმოებულთა შორის გამოყენებულია §4.2-ში ნაპოვნი თანაფარდობების საილუსტრაციოდ და ზოგიერთი ახალი განსაზღვრული ინტეგრალის ანალიზური სახით გამოსათვლელად. მიღებული შედეგები შეჯამებულია ცხრილში 3. პუნქტში A.5 ამოწერილია ყველა არატრივიალური ვრონსკიანი გაუსის დიფერენციალური ჰგ განტოლების კუმერისეული ამონახსნების წყვილებისათვის (ცხრილი 4). პუნქტში A.6 გამოყვანილია თანაფარდობები აპელის ჰგ ფუნქციასა და მის მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციათა შორის. შედეგები განზოგადებულია ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვისთვის (ცხრილი 5). გამოთვლილია ამ თანაფარდობებს შორის განსხვავებულთა რაოდენობა და დაზუსტებულია ლიტერატურაში მოყვანილი მონაცემები.

**დამატება B** შეიცავს [27]-[28] შრომებში ჩამოყალიბებული ზოგიერთი წინადადების ორიგინალურ დამტკიცებას (პუნქტი B.1) და ტექნიკური ხასიათის გამოთვლებს, რომლებიც საჭიროა დინამიური განტოლებების ჩასაწერად ორთოგონალური ინვარიანტების ტერმინებში ასიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვისათვის და იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისათვის (პუნქტი B.2).

**ნაშრომის აპრობაცია.** ნაშრომის ძირითადი შედეგები მოხსენებულ და განხილულ იქნა:

- საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტში;
- საქ. მეცნ. აკადემიის ე. ანდრონიკაშვილის სახ. ფიზიკის ინსტიტუტში;
- ი. ჯავახიშვილის სახ. თსუ-ის თეორიული ფიზიკის კათედრაზე;
- მოსკოვის ელექტრონული მანქანათმშენებლობის ინსტიტუტის მათემატიკის კათედრაზე;
- თსუ-ს ი. ვეკუას სახ. გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში;
- ბირთვული კვლევების გაერთიანებული ინსტიტუტის გამოთვლითი ტექნოლოგიების ლაბორატორიაში, დუბნა (რუსეთი);
- საქართველოს საპატრიარქოს წმინდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართულ უნივერსიტეტში

აგრეთვე საერთაშორისო სემინარებზე და კონფერენციებზე:

1. The 4-th Nat. Conf., Cairo (Egypt), 1992;
2. XXV-th General Assembly of IURS, Lille (France), 1997;
3. საქართველოს მათემატიკოსთა III ყრილობა, თბილისი, 2001;
4. ბირთვული კვლევების გაერთიანებული ინსტიტუტის სემინარზე, დუბნა, 2003;
5. DIPED-2005, IEEE X<sup>th</sup> Int. Seminar/Workshop, Lviv, 2005;
6. CFTI: From Condensed Matter Physics to String Theory, Yerevan-Tbilisi, 2007;

და საუნივერსიტეტო კონფერენციებზე.

**პუბლიკაციები.** დისერტაციის ძირითადი შინაარსი ასახულია 22 ნაბეჭდ და ელექტრონულ ნაშრომში, რომლებიც ლიტერატურის საძიებელში და ტექსტში მითითებულია ნომრებით: [40], [41], [43], [44a], [44b], [45a], [45b], [46a], [46b], [47], [66a], [66b], [67], [94], [95a], [95b], [96], [107], [109], [143], [144], [151].

## თავი I

## ინვარიანტთა თეორიის პრობლემატიკა

## §1.1. ისტორიული მიმოხილვა.

ინვარიანტების თეორია ჩაისახა XVIII საუკუნეში. განვითარების საწყის ეტაპზე ის დაკავშირებული იყო რიცხვთა თეორიის, გეომეტრიისა და ალგებრის ზოგიერთ ამოცანასთან, კერძოდ, ორი ცვლადის კვადრატული ფორმების თეორიასთან.

ჟ. ლაგრანჟმა (1736-1813), იკვლევდა რა მთელი რიცხვების წარმოდგენებს კვადრატული ფორმებით  $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , დაადგინა, რომ ამ ფორმის კოეფიციენტებისგან შედგენილი კომბინაცია  $\Delta = ac - b^2$  არ იცვლება წრფივი გარდაქმნისას  $x \rightarrow x + \lambda y$ .

კ.-ფ. გაუსმა (1777-1855) განიხილა ცვლადთა ზოგადი წრფივი გარდაქმნა ბინარული (ორი) და ტერნარული (სამი) ცვლადის ფორმებისათვის (*Disquisitiones Arithmeticae*, 1801). მან დაამტკიცა, რომ  $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  კვადრატულ ფორმაში  $x, y$  ცვლადების ზოგადი წრფივი გარდაქმნა ფორმულებით  $x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y'$ ,  $y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'$ , გვაძლევს სხვა კვადრატულ ფორმას  $f'(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ , რომლისთვისაც

$$(1) \quad \Delta' = b'^2 - a'c' = (\det(\alpha_{ik}))^2 (b^2 - ac) = (\det(\alpha_{ik}))^2 \Delta.$$

ჯ. სილვესტრმა (1814-1897) გამოსახულებას  $\Delta = ac - b^2$  უწოდა დისკრიმინანტი (1852). დისკრიმინანტი  $\Delta = 0$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კვადრატული ფორმა  $f(x,y)$  არის წრფივი ფორმის კვადრატი (ნიშნის სიზუსტით, თუ ცვლადები ნამდვილია). თუ  $x, y$  ცვლადების გარდაქმნის მატრიცა  $(\alpha_{ik}) \in SL_2(\mathbb{C})$ , ე.ი. თუ  $\det(\alpha_{ik}) = \pm 1$ , მაშინ  $\Delta = \Delta'$ , ანუ *დისკრიმინანტი ინვარიანტულია იმ გარდაქმნების მიმართ, რომლებიც ადვენს  $SL_2(\mathbb{C})$  ჯგუფს*. უკვე გაუსმა იცოდა, რომ დისკრიმინანტი არის ბინარული კვადრატული ფორმის ძირითადი ინვარიანტი, ე.ი. რომ  $a, b, c$  კოეფიციენტების ყოველი პოლინომი  $F(a,b,c)$ , რომელიც ინვარიანტულია  $SL_2(\mathbb{C})$  ჯგუფის მიმართ, თვითონ არის  $\Delta$  ცვლადის პოლინომი. გაუსმა იცოდა ისიც, რომ რომ ეს დებულება სამართლიანია სამი ცვლადის კვადრატული ფორმებისათვისაც.

$n$  ცვლადის კვადრატული ფორმებისათვის

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \leq l} a_{kl} x_k x_l, \quad a_{kl} \in \mathbb{C},$$

დისკრიმინანტი  $\Delta(q) = \det(a_{kl})$ . თანაფარდობა (1) მართებულია  $n$  ნებისმიერი (ნატურალური) მნიშვნელობისათვის. ზოგადი შედეგი კვადრატული ფორმებისათვის მიიღეს ჟ. ბინემ და ო. კოშიმ (1815) ნამრავლის დეტერმინანტის თეორემის დახმარებით.

ინვარიანტების თეორიის სხვა წინამძღვრებს ვპოულობთ კვლევებში კვადრატული ფორმების კვადრატების ჯამად გარდაქმნის შესახებ ორთოგონალური გარდაქმნების საშუალებით და, რა თქმა უნდა, პროექციულ გეომეტრიაში – ვ. პონსელეს, ფ. მიობიუსის, მ. შალის, ი. შტაინერის, ი. პლიუკერის შრომებში. მაგალითისთვის მოვიხსენიოთ სილვესტრის ინერციის კანონი (1852; ეს კანონი იცოდნენ უკვე იაკობიმ (1847) და შლეფლიმ (1851)).

ინვარიანტების თეორიის განვითარებაში მნიშვნელოვანი იყო ჯ. ბულის ნაშრომი (1841), რომელსაც ზოგჯერ ამ თეორიის ჭეშმარიტ საწყისად მიიჩნევენ. თეორიის შემდგომ განვითარებაში მონაწილეობდა XIX საუკუნის სახელგანთქმულ მათემატიკოსთა მთელი პლეადა: ჯ. ბული, ო. ჰესე, ჯ. სილვესტრი, ს. არონჰოლდი, ა. კელი, კ. იაკობი, ფ. ეიხენშტეინი, შ. ერმიტი, ფ. ბრიოში, ა. კლებში, პ. გორდანი, სოფუს ლი, ფ. კლაინი, ა. კაპელი.

XIX საუკუნის შუა წლებში ინვარიანტების თეორია რამდენიმე მიმართულებით გამოეყო რიცხვთა თეორიას. ამ დროისათვის ზუსტი ფორმულირება მიიღო ჯგუფის და ინვარიანტის ცნებებმა, მკაფიოდ ჩამოყალიბდა თეორიის ძირითადი ამოცანები და თანდათან გასაგები გახდა, რომ კლასიკური და პროექციული გეომეტრიის ძირითადი ფაქტები, არსებითად,

გამოხატავენ იგივეობებს ინვარიანტებს შორის გარდაქმნათა შესაბამისი ჯგუფის მიმართ. კელი, მოგვიანებით კი კლაინი თავის ერლანგენის პროგრამაში (1872), განიხილავდნენ ინვარიანტების თეორიას, როგორც მაშინდელი გეომეტრიის (თანამედროვე ტერმინოლოგიით, ელემენტარული გეომეტრიის) ალგებრულ ასლს და იყენებდნენ მას ელემენტარული გეომეტრიების, კერძოდ, ევკლიდეს გეომეტრიის განსაზღვრისა და კლასიფიცირებისათვის.

არტურ კელიმ შეიმუშავა “ჰიპერდეტერმინანტების აღრიცხვა” (1846), რომლის დახმარებითაც შეიძლება ინვარიანტების ნებისმიერი რაოდენობის აგება, და დაახასიათა ინვარიანტები დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით. ბულის, ეიზენშტეინის და ჰესეს შრომებში ჩნდება უფრო ზოგადი ცნებები – ე.წ. *კოვარიანტი* და *კონტრავარიანტი*. სილვესტრი სისტემატურად იკვლევდა ამ ცნებებს და გააერთიანა ყველა ინვარიანტული წარმონაქმნი ცნებაში *კონკომიტანტი* (1852). სილვესტრი, ერმიტი და გერმანული სკოლის წარმომადგენლები არონჰოლდი, გორდანი, კლებში ინვარიანტების თეორიას იხილავდნენ, როგორც წმინდა ალგებრულ თეორიას, თავის ამოცანას ხედავდნენ ინვარიანტების აგების ცხადი ალგორითმების პოვნაში. კლებშია, გორდანმა და არონჰოლდმა განავითარეს ე.წ. სიმბოლური მეთოდი (იხ., მაგ., [15]), რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული კელის ჰიპერდეტერმინანტების აღრიცხვასთან და აქციეს იგი მძლავრ ინსტრუმენტად ყველა იმ ინვარიანტის გამოსათვლელად, რომელთა ხარისხი არ აღემატება მოცემულ რიცხვს. კელიმ და სილვესტრმა დააფუძნეს ე.წ. ჩამოთვლის მეთოდი, (Abzählkalkül) კოვარიანტებისათვის, ამასთან, კელიმ ზოგადი პრობლემაც კი დასვა *საბაზისო ინვარიანტების* საბოლოო რიცხვის პოვნის შესახებ, რომელთა საშუალებითაც ყველა სხვა ინვარიანტი გამოისახება მთელი რაციონალური კომბინაციებით. სასრული რაოდენობის ასეთი საბაზისო ინვარიანტების მითითება ხერხდებოდა ყველა შესწავლილ შემთხვევაში ინვარიანტთა თეორიის განვითარების უკვე საწყის ეტაპზე, რამაც შესაძლებელი გახადა ინვარიანტთა მთელი სისტემის მთლიანობაში განხილვა.

1868 წელს გორდანმა ააგო ინვარიანტების სასრული ბაზისი ბინარული (ორი ცვლადის) ფორმებისათვის, ფრიად შრომატევადი კომბინატორული გზით. მისი ეს ნაშრომი იყო ჰილბერტამდელი პერიოდის მწვერვალი, განსაკუთრებით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ სულ ცოტა ხნით ადრე თვით კელის მიაჩნდა, რომ სასრული ბაზისი ზოგად შემთხვევაში არ არსებობს.

მაგრამ არსებითი წინსვლა განახორციელა მხოლოდ დ. ჰილბერტმა (1862-1943), რომელმაც ინვარიანტების თეორიისადმი მიძღვნილ თავის ორ სახელგანთქმულ შრომაში [68] და [69] (1890 და 1893), სრულიად ახალი მეთოდების მოშველიებით, ამოწურა ინვარიანტების ბაზისის სასრულობის პრობლემა ზოგადი შემთხვევისათვის. მან ერთი დაკვრით გადაჭრა მაშინდელი ინვარიანტების თეორიის ცენტრალური პრობლემების მთელი რიგი. სწორედ ამან წამოაძახებინა “ინვარიანტების თეორიის მეფედ“ წოდებულ პ. გორდანს – “ეს მათემატიკა კი არა, თეოლოგიაა!”-ო.

ინვარიანტთა კლასიკური თეორიის ძირითადი ამოცანა უზოგადესი სახით შეიძლება ადეკვატურად დაისვას XX საუკუნის 30 წლებისათვის განვითარებულ ნახევრადმარტივი ჯგუფების წარმოდგენათა თეორიის ტერმინებში [15]:

ვთქვათ, მოცემულია ჯგუფი  $G$  და მისი სასრულგანზომილებიანი წრფივი წარმოდგენა  $\rho$  წრფივ ვექტორულ  $V$  სივრცეში  $\mathbb{F}$  ველზე. თუ  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  კოორდინატებია  $V$  სივრცეში (რომელიმე ბაზისში), მაშინ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი  $g \in G$  განსაზღვრავს ცვლადთა წრფივ გარდაქმნას  $x = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow x' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ , რომელსაც სიმბოლურად ჩავწერთ, როგორც  $x' = gx$ . ცვლადთა ეს გარდაქმნა ნებისმიერ მრავალწევრს  $P(x_1, \dots, x_n)$  გადააქცევს ახალ მრავალწევრად  $P'(x'_1, \dots, x'_n)$ , ასე რომ გვაქვს ავტომორფიზმი (თავისთავზე ასახვა)  $x$  ცვლადებზე დამოკიდებული ყველა მრავალწევრის რგოლში  $\mathbb{F}$  ველზე. მრავალწევრს, რომელიც არ იცვლება ყველა ასეთი გარდაქმნებისას (ე.ი. როცა  $g$  გაირბენს  $G$  ჯგუფს), ეწოდება  $G$  ჯგუფის  $\rho$  წარმოდგენის ინვარიანტი.  $G$  ჯგუფის  $\rho$  წარმოდგენის ყველა ინვარიანტის სიმრავლე შეადგენს ალგებრას. ინვარიანტთა თეორიის ამოცანაა ამ ალგებრის აღწერა.



ინვარიანტების აღწერის ასეთნაირად დასმული ამოცანა არის წრფივ წარმოდგენათა თეორიის შემდეგი ზოგადი ამოცანის კერძო შემთხვევა: მოცემული ვალენტობის ტენზორების სივრცე დაეშალოთ დაუყვანად ინვარიანტულ ქვესივრცეებად ძირითად სივრცეში მოქმედი წრფივი გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ (ინვარიანტების პოვნა დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფაზე).

მოცემული წარმოდგენის ინვარიანტების სიმრავლეში სასრული რაოდენობის  $P_1, \dots, P_m$  საბაზისო ინვარიანტების არსებობა ნიშნავდა, რომ შესწავლილ შემთხვევებში ინვარიანტების აღგებრა იყო სასრულად წარმოქმნილი. გამოირკვა აგრეთვე, რომ საბაზისო ინვარიანტები  $P_1, \dots, P_m$ , საზოგადოდ, არაა დამოუკიდებელი (ანუ ინვარიანტების აღგებრა არ არის თავისუფალი): შეიძლება არსებობდეს ისეთი არატრივიალური მრავალწევრები  $S(t_1, \dots, t_m)$ , რომლებიც იგივეურად ნულის ტოლი ხდება, თუ ჩავსვამთ  $t_k = P_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ . ამ  $S(t_1, \dots, t_m)$  მრავალწევრებს უწოდებენ *თანაფარდობებს* ან *სიზიგიებს* (ტერმინი ეკუთვნის ფ. კლაინს). სიზიგიების სიმრავლეში, თავის მხრივ, შეიძლება მოიძებნოს სასრული ქვესიმრავლე საბაზისო სიზიგიებისა, ისეთი, რომ ყველა დანარჩენი სიზიგია ამ ქვესიმრავლეში შემავალი სიზიგიების აღგებრული შედეგია. თავის მხრივ, ამ საბაზისო სიზიგიებს შორის შეიძლება არსებობდეს პოლინომური თანაფარდობები – *ძეორე სიზიგიები* და ა.შ. ასეთნაირად აგებული *სიზიგიების ჯაჭვის* სივრცე ყველა შესწავლილ შემთხვევაში აღმოჩნდა სასრული. მაგალითად, თუ  $G$  არის  $n$  ელემენტის გადანაცვლების ჯგუფი (სიმეტრიული ჯგუფი  $S_n$ , იხ., მაგ., [7]), მაშინ ინვარიანტების აღგებრა არის  $x_1, \dots, x_n$  ცვლადების ყველა სიმეტრიული მრავალწევრის აღგებრა. ამ შემთხვევაში საბაზისო ინვარიანტებს წარმოადგენს ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები (იხ., მაგ., [59] და დისერტაციის II-III თავი), რომლებიც ერთმანეთისაგან აღგებრულად დამოუკიდებელია, ე.ი. აქ სიზიგიები არ გვაქვს (სიზიგიების ჯაჭვის სივრცე = 0).

ამ დაკვირვებების საფუძველზე დაისვა ინვარიანტთა კლასიკური თეორიის ორი ძირითადი პრობლემა:

I. დამტკიცდეს, რომ მოცემული ჯგუფის მოცემული წარმოდგენის ინვარიანტების აღგებრა არის სასრულად წარმოქმნილი (ინვარიანტების თეორიის I ძირითადი თეორემა) და განისაზღვროს საბაზისო ინვარიანტების სისტემა.

II. დამტკიცდეს, რომ არსებობს სიზიგიების სასრული ბაზისი (II ძირითადი თეორემა) და აიგოს ეს ბაზისი.

შრომაში [68] დ. ჰილბერტმა დაამტკიცა I ძირითადი თეორემა ნებისმიერი სასრული ხარისხის  $n$  ცვლადზე დამოკიდებული ფორმის ინვარიანტებისათვის (1890). მანვე დაამტკიცა II ძირითადი თეორემის სამართლიანობა ყველა იმ შემთხვევისათვის, როცა სამართლიანია I ძირითადი თეორემა და რომ ამ შემთხვევაში სიზიგიების ჯაჭვის სივრცე სასრულია. ამ შედეგების მიღება ჰილბერტმა შეძლო მის მიერვე საგანგებოდ დამტკიცებულ ზოგად აბსტრაქტულ აღგებრულ დებულებებზე დაყრდნობით.

I ძირითადი თეორემის ჰილბერტის თავდაპირველი დამტკიცება იყო არაკონსტრუქციული და არ იძლეოდა საბაზისო ინვარიანტების ხარისხებისათვის შეფასებას ზემოდან. მაგრამ შემდგომში ასეთი შეფასებები გაკეთდა [69], რამაც, პრინციპში მაინც, შესაძლებელი გახდა ყველა საბაზისო ინვარიანტის გამოთვლა ზემოთ მითითებული ფორმალური მეთოდებით.

დ. ჰილბერტის მიერ ინვარიანტების კლასიკური თეორიის ძირითადი პრობლემის გადაჭრის შემდეგ მათემატიკოსებმა გარკვეული დროით ინტერესი დაკარგეს ამ სფეროს მიმართ, რამდენადაც აღარ ჩანდა ღრმა, დაუძლეველი პრობლემები. ასე იყო 1935 წლამდე, როცა ი. შურის, ჰ. ვეილის, ე. კარტანისა და სხვათა მიერ შეიქმნა კლასიკური ჯგუფების წარმოდგენათა თეორია და გაირკვა, რომ ინვარიანტების თეორიის ნაწილი კერძო შემთხვევაა ჯგუფების წარმოდგენათა თეორიისა. ეს სრულიად მკაფიოდ არის ნაჩვენები

ჰ. ვეილის სახელგანთქმულ მონოგრაფიაში [70]. ამ ნაშრომმა (1946) დააჯამა ინვარიანტთა თეორიის განვითარების II პერიოდი. ვეილმა, ჰილბერტის და ჰურვიციის იდეებზე დაყრდნობით, დაამტკიცა ინვარიანტთა თეორიის I ძირითადი თეორემა ლის ნებისმიერი კომპაქტური ჯგუფის სასრულგანზომილებიანი წარმოდგენებისათვის და ლის ნებისმიერი კომპლექსური ნახევრადმარტივი ჯგუფის სასრულგანზომილებიანი წარმოდგენებისათვის. ეს შედეგები და კლასიკურ ჯგუფთა წარმოდგენების საბაზისო ინვარიანტებისა და სიზიგიების აღწერა მოცემულია ფუნდამენტურ მონოგრაფიაში [15].

XX საუკუნის 50-იან წლებში მიღებულ იქნა რიგი შედეგებისა სასრული ჯგუფების ინვარიანტების შესახებ, კერძოდ, არეკვლებით წარმოქმნილი ჯგუფებისათვის. დამტკიცდა [71], [72], რომ უნიტარული არეკვლებით წარმოქმნილი სასრული წრფივი კომპლექსური ჯგუფების ინვარიანტების აღგებრა თავისუფალია (ანუ არ აქვს სიზიგიები).

1963 წელს დ. მამფორდმა [73] ისევ მიმართა ინვარიანტების კლასიკურ თეორიას. მან აღმოაჩინა გეომეტრია  $n$  ცვლადის ფორმების კლასიკურ თეორიაში, კერძოდ, ჰილბერტის შრომაში [69] და აჩვენა, რომ ინვარიანტების კლასიკური თეორიის გეომეტრიულ საფუძველს წარმოადგენს ალგებრულ მრავალსახეობათა მოდულების თეორია. ამ დროიდან აითვლიან ინვარიანტთა თეორიის “მესამე აღორძინების” პერიოდს, რომელიც დღემდე გრძელდება.

ინვარიანტების თანამედროვე თეორია (ინვარიანტების გეომეტრიული თეორია) ნაწილია გარდაქმნათა ალგებრული ჯგუფების ზოგადი თეორიისა და ეფუძნება 1950-იან წლებში შექმნილ ალგებრული ჯგუფების თეორიას.

ინვარიანტების თანამედროვე თეორია იხილავს ნებისმიერ სასრულად წარმოქმნილ  $R$  ალგებრას ( $F$  ველზე) და ამ ალგებრის  $F$ -ავტომორფიზმების ალგებრულ  $G$  ჯგუფს (განსხვავებით კლასიკური თეორიისგან, რომლისთვისაც შესწავლის ძირითად ობიექტს წარმოადგენდა  $n$  ცვლადის მრავალწევრთა  $F$ -რგოლი და ამ რგოლის  $F$ -ავტომორფიზმები, ინდუცირებული ცვლადთა წრფივი გარდაქმნებით). ნაცვლად  $V$  წრფივი სივრცისა და  $\rho$  წარმოდგენისა, ინვარიანტების გეომეტრიულ თეორიაში განიხილება ნებისმიერი აფინური ალგებრული მრავალსახეობა  $X$  და მისი ავტომორფიზმების ალგებრული ჯგუფი  $G$ . ამიტომ  $R$  არის რეგულარული ფუნქციების რგოლი  $X$  მრავალსახეობაზე, ხოლო  $G$  ჯგუფის მოქმედება  $R$  რგოლზე ინდუცირებულია  $G$ -ს მოქმედებით  $X$  მრავალსახეობაზე.  $R$  რგოლის ელემენტი, რომლებიც უძრავი რჩება  $G$  ჯგუფის მოქმედებისას, არის ინვარიანტი; ყველა ასეთი ელემენტის სიმრავლე – ინვარიანტების სიმრავლე – შეადგენს  $F$ -ალგებრას  $R^G$ .

თუ  $R^G$  სასრულადაა წარმოქმნილი, მაშინ ამბობენ, რომ სამართლიანია ინვარიანტების თეორიის I ძირითადი თეორემა. მტკიცდება [74], რომ  $R^G$  არის სასრულად წარმოქმნილი, თუ ჯგუფი  $G$  გეომეტრიულად რედუქტიულია (ანუ თუ მისი ყოველი წრფივი სასრულგანზომილებიანი წარმოდგენა საგსებით დაყვანადია [73]).

გეომეტრიული თვალსაზრისით, ინვარიანტულ რგოლზე გადასვლას შეესაბამება გადასვლა “ალგებრულ ფაქტორზე”, რომლის საკოორდინატო რგოლი შედგება ზუსტად ინვარიანტული ფუნქციებისაგან. ინვარიანტების  $R$  რგოლის აღწერის კლასიკური პრობლემა მსახველებისა და თანაფარდობების საშუალებით ადგილს უთმობს უფრო გეომეტრიულ საკითხებს ამ ფაქტორის სტრუქტურის შესახებ.

თანამედროვე წარმოდგენების ჩარჩოებში გეომეტრიული ობიექტების შესწავლა მჭიდროდ გადაიხლართა ჯგუფთა თეორიის, რგოლების, მრავალსახეობების და აბსტრაქტული ალგებრის სხვა მეთოდებთან. პირიქითაც, ტრადიციულად ალგებრულ კვლევებში სულ უფრო ღრმად იჭრება გეომეტრიული მეთოდები. უკანასკნელ ათწლეულებში ჩამოყალიბდა და დამოუკიდებელ დისციპლინად იქცა ალგებრული გეომეტრია (თუკი დასაშვებია ვუწოდოთ „დამოუკიდებელი“ თანამედროვე მეცნიერების, განსაკუთრებით კი თანამედროვე მათემატიკის რომელიმე დარგს). 1970-იან წლებში გამოიკა ფუნდამენტური მონოგრაფიები ალგებრულ გეომეტრიაში (მაგ., [75]; იხ., აგრეთვე, [74] და იქ მითითებული წყაროები) და გეომეტრიულ ალგებრაში [76].

მონოგრაფიაში [74] (1985) მოცემულია ჩაკეტილი ორბიტების აღწერა, შესწავლილია ფაქტორიზაციის ასახვის ფუნქციის, განსაკუთრებით “ნულოვანი ფუნქსიონის” აგებულება, მათი გაშლა ორბიტებად, დადგენილია ზოგიერთი კავშირი კლასიფიკაციისა და ნორმალური ფორმების პრობლემებთან (რაც ინვარიანტების კლასიკურ თეორიაში კვლევების საწყის წერტილად ითვლება). შევნიშნოთ, რომ  $R^G$ -ალგებრის სტრუქტურის შესწავლა (რაც იყო კლასიკური თეორიის საბოლოო მიზანი) არის ამ გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრის მხოლოდ საწყისი ეტაპი.

ალგებრული სტრუქტურების აღწერა გეომეტრიული მეთოდების და წარმოდგენების გამოყენებით – ორბიტები, სტაბილური წერტილები, ფუნქციები და სხვა – რამდენიმე ათეული წელიწადია აქტიურად ვითარდება და ახალი შედეგებით მდიდრდება. ეს ეხება ალგებრული ობიექტების, კერძოდ, ოპერატორებისა და მათი მატრიცების კლასიფიკაციის ამოცანასაც მათი ინვარიანტების ტერმინებში სხვადასხვა ჯგუფების მიმართ – მივუთითოთ შპეხტის [16] (1940), პირსის [17a,b] (1962), ჯ.სმიტის [18] (1970), ა.ელაშვილის [77-78] (1972), გ.შვარცის [79a,b] (1978) და [80] (1980), დონკინის [37] (1990) და [38] (1993), ზუბკოვის [81] (1996), ვინბერგის [82] (1986) და [35] (1996), ლოპატინის [39a,b] (2009) შრომები, აგრეთვე მიმოხილვები და მონოგრაფიები [23], [24], [34a,b], [70], [83]. განსაკუთრებული სისრულით და განხილვის სიღრმით, აგრეთვე კლასიკური შედეგების გაშუქებით თანამედროვე შესხედულებებთან მიმართებაში გამოირჩევა ჰორნისა და ჯონსონის მონოგრაფია [20] (1986), რომელიც, ფ. განტმახერის სახელგანთქმულ [42] მონოგრაფიასთან ერთად, ენციკლოპედიურ ინფორმაციას შეიცავს სასრულგანზომილებიან სივრცეებში ოპერატორების და მათი მატრიცების შესახებ.

ცალკე უნდა აღინიშნოს ა.ტ. ფომენკოსა და მისი თანაავტორების მიერ გამოცემული მონოგრაფიები და სახელმძღვანელოები თანამედროვე გეომეტრიაში [84]-[86]. აქ, გარდა იმ საკითხებისა, რომლებიც ტრადიციულად შეაქვთ ასეთი შინაარსის გამოცემებში, დრამა და ფართოდ არის გაანალიზებული მნიშვნელოვანი ფიზიკური ამოცანების მთელი რიგი – ლორენცის ჯგუფი და ფარდობითობის სპეციალური თეორიის გეომეტრია, მაქსველის ელექტროდინამიკა, კლაინ-გორდონის და კორტვეგე-დე ვრიზის განტოლებები.

წარმოდგენილ დისერტაციაში მოყვანილი შედეგები აზუსტებს და ავსებს ამ ნაშრომებში მიღებულ ზოგიერთ შედეგს. კერძოდ, დაზუსტებულია პირსის [17a,b] მიერ ნაპოვნი შეფასება მატრიცების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის საკმარისი ინვარიანტების რაოდენობისათვის [40]. ნაპოვნი ანალოგიური შეფასება გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორებისათვის და მათი მატრიცებისათვის უნიტარულ სივრცეში [41]. ცხადი სახით აგებულია ასეთი კლასიფიცირებისათვის აუცილებელი და საკმარისი უნიტარული და ორთოგონალური ინვარიანტების სიმრავლე და ნაჩვენებია, რომ ეს სიმრავლე შეადგენს პოლინომური ინვარიანტების ბაზისს [40], [41]. ამასთან, ნაჩვენებია, რომ [17]-[19], [24] და ზოგიერთ სხვა ნაშრომში მიღებული შედეგები არ არის ზუსტი და გაკეთებულია შესაბამისი დაზუსტებები. დამტკიცებულია, რომ ზოგად შემთხვევაში ამ შეფასებების გაუმჯობესება არ შეიძლება.

ჩვენს მიერ აგებული ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური ბაზისი და თანაფარდობები (სიზიგიები) საბაზისო ინვარიანტებს შორის საშუალებას იძლევა ამოიხსნას ზოგიერთი ფიზიკური და მათემატიკური ამოცანა [87]-[90]. შესაბამისი ორიგინალური შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [44a,b], [45a,b], [46a,b], [47], [66a,b], [67], [91]-[94].

ეს წინსვლა შესაძლებელი გახდა სპეციალურად შემოღებული განმარტებების და განმარტებული ობიექტების თვისებების გამოკვლევის შედეგად. ნაშრომებში [44a,b], [43], [67], [96] განზოგადებულია ვანდერმონდის მატრიცა, შესწავლილია მისი  $r \times r$  ზომის მინორებით და პერმანენტებით შედგენილი მატრიცები, ნაჩვენებია ამ მატრიცების დეტერმინანტების კავშირი ზოგიერთ სპეციალურ ფუნქციასთან და ნაპოვნი ახალი თანაფარდობები მათ შორის.

## §1.2. ინვარიანტები და გეომეტრია

როგორც უკვე აღინიშნა, XIX საუკუნეში ელემენტარული გეომეტრია მჭიდროდ იყო დაკავშირებული ინვარიანტების თეორიასთან და სტიმულს აძლევდა მის განვითარებას. ამ პარაგრაფში მოკლედ აღვწერთ ამ კავშირს.

“პროექციული გეომეტრია – ეს მთელი გეომეტრიაა” – განაცხადა კელიმ; შემდგომ, 1872 წელს, ფელიქს კლაინმა შემოგვთავაზა თავისი ერლანგენის პროგრამა [12].

ჯერ განვიხილოთ კელის მტკიცება. პროექციულ გეომეტრიას (კომპლექსური ან ნამდვილი რიცხვების  $\mathbb{F}$  ველზე) საქმე აქვს წერტილებთან და ფორმებთან. *პროექციული გეომეტრიის მტკიცება*  $\mathbb{P}^n$  სივრცეში ეხება  $\eta_k = (\eta_k^0, \dots, \eta_k^n)$  წერტილების სასრულ რიცხვსა და  $f^{(v)} = \sum a_\alpha^{(v)} x^\alpha$  ფორმების სასრულ რიცხვს; ის არ უნდა იყოს დამოკიდებული კოორდინატა სისტემის არჩევაზე, ე.ი. უნდა იყოს ინვარიანტული  $PGL_n(\mathbb{F})$  ჯგუფის მოქმედების მიმართ. ანალიზურად ასეთი მტკიცება მოიცემა წერტილებისა და ფორმების კოორდინატა რაციონალური ფუნქციით  $\varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$ , რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

- 1) ფუნქცია  $\varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$  წარმოადგენს ნულოვანი რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას, ე.ი.  $\varphi(\lambda^i \eta^i, \rho^v a_\alpha^{(v)}) = \varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$  ყოველი  $\lambda^i, \rho^v \in \mathbb{F} - \{0\}$ -სათვის. სხვაგვარად,  $\varphi$  ფუნქციის მნიშვნელობები დამოკიდებულია მხოლოდ თვით წერტილებსა და ფორმებზე და არა იმ რიცხვთა მნიშვნელობებზე, რომლებიც მათ აღწერს.
- 2) ფუნქცია  $\varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$  ფარდობითი ინვარიანტია  $GL_{n+1}(\mathbb{F})$  ჯგუფის მოქმედების მიმართ, ე.ი.  $\varphi(\sigma(\eta^i), \sigma(a_\alpha^{(v)})) = (\det \sigma)^m \varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$ ,  $\sigma \in GL_{n+1}(\mathbb{F})$ , სადაც  $m$  – მთელი რიცხვია, რომელსაც  $\varphi$  ფუნქციის *წონა* ეწოდება.

ასეთ რაციონალურ  $\varphi(\eta^i, a_\alpha^{(v)})$  ფუნქციას *ერთგვაროვანი ინვარიანტი* ეწოდება.  $\mathbb{P}^n$  სივრცის გეომეტრიაში აზრი აქვს მხოლოდ ერთგვაროვან ფარდობით ინვარიანტებს.

*თეორემა  $\mathbb{P}^n$  სივრცეში* – ეს არის პოლინომური იგივეობა, ანუ სიზიგია ერთგვაროვანი ინვარიანტების რაიმე სასრული ნაკრების ელემენტებს შორის.

ამრიგად,  $GL_{n+1}$  ჯგუფის ინვარიანტთა თეორია განსაზღვრავს გეომეტრიას  $\mathbb{P}^n$  სივრცეში. განვიხილოთ მარტივი მაგალითი.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ, მოცემულია სივრცე  $\mathbb{P}^1/\mathbb{F}$  ერთგვაროვანი კოორდინატებით  $(x, y)$

და ოთხი წერტილი  $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{P}^1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . მაშინ  $\Delta_{ij} = \det \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix}$  არის  $(x_i, y_i)$  კოორდინატების

არაერთგვაროვანი ინვარიანტი წონით 1. ამიტომ  $\Delta_{ij}$  არ აქვს აზრი პროექციულ გეომეტრიაში. თუ აღმოჩნდა, რომ  $\Delta_{ij} = 0$ , მაშინ ეს მტკიცება ერთგვაროვანია და მას აქვს გეომეტრიული აზრი, კერძოდ, ეს ნიშნავს, რომ წერტილები  $P_i$  და  $P_j$  ემთხვევა ერთმანეთს.

$\Delta_{ij}$  დეტერმინანტებიდან ერთგვაროვანი ინვარიანტის მისაღებად საჭიროა არანაკლებ ოთხი წერტილისა. ოთხი წერტილის კოორდინატებით შეგვიძლია ავაგოთ რაციონალური ფუნქცია  $(\Delta_{12} \cdot \Delta_{34}) / (\Delta_{14} \cdot \Delta_{32})$ , რომელიც აბსოლუტური ინვარიანტია; ესაა ოთხი წერტილის კარგად ცნობილი ორმაგი შეფარდება.

სიზიგია

$$(2) \quad \Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{42} + \Delta_{14} \Delta_{23} = 0$$

შეესაბამება თეორემას  $\mathbb{P}^1$ -ში, რომლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია დაიყვანება კარგად ცნობილ თანაფარდობაზე ოთხი  $P_1, P_2, P_3, P_4$  წერტილის ორმაგი შეფარდების ექვს შესაძლო

(ამ წერტილების რიგზე დამოკიდებულ) მნიშვნელობას შორის. მის საპოვნელად (2) თანაფარდობის ორივე მხარე გავყოთ უკანასკნელ შესაკრებზე. მივიღებთ:

$$(2') \quad (\Delta_{12} \cdot \Delta_{34}) / (\Delta_{14} \cdot \Delta_{32}) = 1 - (\Delta_{13} \cdot \Delta_{24}) / (\Delta_{14} \cdot \Delta_{23}).$$

გადავიდეთ კელის მტკიცებაზე იმის შესახებ, რომ პროექციული გეომეტრია – ეს მთელი გეომეტრიაა. რა აზრით წარმოადგენენ აფინური, ევკლიდური და არაევკლიდური გეომეტრია პროექციული გეომეტრიის ნაწილებს?

ვთქვათ,  $x_0, \dots, x_n$  – კოორდინატებია  $\mathbb{P}^n$ -ში. აღვნიშნოთ  $H_\infty = \{x_0 = 0\}$  უსასრულოდ დაშორებული ჰიპერსიბრტყე და  $A^n = \mathbb{P}^n - H_\infty$  – ამ ჰიპერსიბრტყის დამატება.  $A^n$  წარმოადგენს  $\mathbb{P}^n$ -ში ჩადებულ  $n$ -განზომილებიან აფინურ სივრცეს უსასრულოდ დაშორებული  $H_\infty$  ჰიპერსიბრტყით.

კელის მიერ ფორმულირებული პრინციპი შეიძლება ჩამოვყალიბოთ ორი წინადადების სახით:

**წინადადება 1.** აფინური გეომეტრიის მტკიცებები და თეორემები  $A^n$ -ში სასრული რაოდენობის წერტილებითა და სასრული რაოდენობის პოლინომებით, ანუ  $A^n$ -ში ჰიპერზედაპირებით შედგენილი გეომეტრიული კონფიგურაციების შესახებ წარმოადგენს პროექციული გეომეტრიის მტკიცებებსა და თეორემებს  $H_\infty$  ჰიპერსიბრტყით შევსებული შესაბამისი პროექციული კონფიგურაციების შესახებ (შევნიშნოთ, რომ აფინურ  $\tilde{x}_i = x_i/x_0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , კოორდინატებზე დამოკიდებულ  $r$  ხარისხის ყოველ  $f(\tilde{x}_i)$  პოლინომს შეიძლება შევუსაბამოთ  $x_i$  ცვლადებზე დამოკიდებული  $r$  ხარისხის ფორმა  $x_0^r f(\tilde{x}_i) = f(x_0, \dots, x_n)$ .  $A^n$ -ის ყოველი წერტილი განიხილება, როგორც წერტილი  $\mathbb{P}^n$ -ში).

**წინადადება 2.** ევკლიდური გეომეტრიის მტკიცებები და თეორემები გეომეტრიული კონფიგურაციების შესახებ  $A^n \subset \mathbb{P}^n$ -ში – ესაა პროექციული მტკიცებები შესაბამისი პროექციული კონფიგურაციების შესახებ, რომლებიც შევსებულია უსასრულოდ დაშორებული კვადრატული ჰიპერზედაპირით, რომლის განტოლებაა  $x_0 = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ .

ევკლიდური გეომეტრიის პროექციული გეომეტრიიდან გამოყვანის განხილულმა მეთოდმა, რომელშიც არსებითია  $\varphi(x_i) = 0 \cdot x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$  კვადრატული ფომის გამოყენება, მიიყვანა კელი იდეამდე, ნებისმიერკოეფიციენტებიანი ნამდვილი (არაგადაგვარებული)  $\varphi(x_i) \in \mathbb{P}^n$  კვადრატული ფორმის გამოყენებით, მიეღო პროექციული გეომეტრიიდან არაევკლიდური გეომეტრია. მოგვიანებით კლაინმა უჩვენა, რომ ამ მეთოდით მართლაც შეიძლება არაევკლიდური გეომეტრიების აგება (იხ., მაგ., [13]).

პროექციული გეომეტრიიდან „დანარჩენი“ გეომეტრიების გამოყვანისას კელი იყენებდა სრული პროექციული ჯგუფის ინვარიანტებს, ოღონდ გაფართოებული გეომეტრიული კონსტრუქციებისათვის. კლაინმა [12] აჩვენა, რომ სხვადასხვა გეომეტრიები შეიძლება მივიღოთ, თუ  $PGL_n$  სრული პროექციული ჯგუფის ნაცვლად განვიხილავთ მის რომელიმე ქვეჯგუფს და ამ ქვეჯგუფის ინვარიანტების თეორიას. სხვადასხვა გეომეტრიის შესაბამისი ქვეჯგუფი შეიცავს  $PGL_n$  პროექციული ჯგუფის სწორედ იმ ელემენტებს, რომლებიც ინვარიანტულს ტოვებენ ამ გეომეტრიაში შემოტანილ დამატებით ობიექტს. მაგალითად, აფინური გეომეტრია  $A^n = \mathbb{P}^n - H_\infty$  სივრცეში მიიღება აფინური ჯგუფის ინვარიანტთა თეორიიდან, ამასთან, აფინური ჯგუფი შედგება  $\mathbb{P}^n$  სივრცის ყველა იმ პროექციული გარდაქმნებისგან, რომლებსაც თავის თავში გადაჰყავთ უსასრულოდ დაშორებული ჰიპერზედაპირი  $H_\infty$ . ევკლიდური გეომეტრია მიიღება  $A^n = \mathbb{P}^n - H_\infty$  სივრცეში იმ გარდაქმნების ჯგუფის განხილვით, რომლებიც, გარდა უსასრულოდ დაშორებული  $H_\infty$  ჰიპერზედაპირისა,

ინვარიანტულს ტოვებს ევკლიდურ კვადრატულ ფორმას

$$\varphi(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

ნამდვილი გარდაქმნების ასეთი ჯგუფი არის ორთოგონალური ჯგუფი  $O_n$ ; მისი ინვარიანტების თეორია გვაძლევს ევკლიდურ გეომეტრიას.

კლასის მიდგომაში, თითოეული არაევკლიდური გეომეტრია მიიღება, როგორც შესაბამის არაევკლიდურ გარდაქმნათა ჯგუფის ინვარიანტთა თეორია. გარდაქმნათა ეს ჯგუფი წარმოადგენს ნამდვილ პროექციულ გარდაქმნათა ჯგუფის იმ ქვეჯგუფს, რომელიც უძრავს ტოვებს შესაბამის არაევკლიდურ კვადრატულ ფორმას

$$\varphi = ax_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ (a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

ამასთან, როცა  $a < 0$ , გვექნება ბოლიაი-ლობაჩევსკის გეომეტრია, ხოლო როცა  $a > 0$  – რიმანის გეომეტრია (იხ., მაგ., [13]).

თავის ერლანგენის პროგრამაში კლასი ამტკიცებს [12], რომ ზოგად შემთხვევაში

***PGL<sub>n</sub> ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფი განსაზღვრავს შესაბამის გეომეტრიას, როგორც ამ ქვეჯგუფის ინვარიანტთა თეორიას.***

შემდეგი მაგალითები [13] ამ პრინციპებს უფრო ნათელს ხდის.

**მაგალითი 2.** განვიხილოთ  $n+1$  წერტილი  $P_i = (1, x_i^1/x_i^0, \dots, x_i^n/x_i^0) \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ ,  $i = \overline{0, n}$ . მაშინ ამ წერტილებშიწვეროების მქონე  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$  სიმპლექსის (იხ., მაგ., [97], n°162, გვ. 348-350) (ორიენტირებული) მოცულობაა

$$(3) \quad V_n(P_0, \dots, P_n) = \frac{1}{n!} \det \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ x_0^0 & x_0^0 & x_0^0 & \dots & x_0^0 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_1^0 & x_1^0 & x_1^0 & \dots & x_1^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ x_n^0 & x_n^0 & x_n^0 & \dots & x_n^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{n! x_0^0 x_1^0 \dots x_n^0} \det \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

ცხადია, დეტერმინანტი  $\det[x_{i-1k-1}]_{i,k=\overline{1, n+1}}$ , რომელიც დგას (3) ფორმულის მარჯვენა მხარეში, ინვარიანტულია  $GL_{n+1}(\mathbb{F})$  ჯგუფის მიმართ. ინვარიანტულია  $(x_0^0 x_1^0 \dots x_n^0)$  მამრავლიც, როგორც  $P_i$  წერტილებში  $x_0$  წრფივი ფორმის მნიშვნელობათა ნამრავლი. ამიტომ  $V(P_i)$  არის რაციონალური ერთგვაროვანი  $r=0$  ხარისხის ინვარიანტი  $P_i = (x_{i0}, \dots, x_{in})$ ,  $i = \overline{0, n}$ , წერტილების კოორდინატების მიმართ, მაგრამ  $r=-(n+1)$  ხარისხის ერთგვაროვანი ინვარიანტია  $x_0$  წრფივი ფორმის  $(1, 0, \dots, 0)$  კოეფიციენტების მიმართ. მაშასადამე  $V(P_i)$  არ გააჩნია გეომეტრიული შინაარსი აფინურ  $\mathbb{A}^n$  სივრცეში. ეს გასაგებიცაა: ნებისმიერი გაზომვისათვის აუცილებელია ერთეულის არჩევა. თუ  $\mathbb{A}^n$  სივრცეში დავაფიქსირებთ რომელიმე არაგადაგვარებულ სიმპლექსს  $\langle Q_0, Q_1, \dots, Q_n \rangle$  და ავაგებთ შეფარდებას

$$(4) \quad \tilde{V}_n(P_i) = \frac{V_n(P_i)}{V_n(Q_i)},$$

მივიღებთ  $GL_{n+1}(\mathbb{F})$  ჯგუფის აბსოლუტურ ინვარიანტს, რომელიც უკვე ეკუთვნის აფინურ გეომეტრიას. ცხადია, (4) აღწერს  $\langle P_0, \dots, P_n \rangle$  სიმპლექსის მოცულობას  $\langle Q_0, \dots, Q_n \rangle$  სიმპლექსის მოცულობის ერთეულებში.

**მაგალითი 3.** კელის მეთოდის თანახმად, ევკლიდური გეომეტრიის ობიექტები მიიღება პროექციული გეომეტრიიდან შემდეგნაირი მსჯელობით.

ორ  $P = (1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$  და  $Q = (1, y_1/y_0, \dots, y_n/y_0) \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$  წერტილს შორის მანძილი გამოისახება ფორმულით

$$(5) \quad l_{PQ} = \sqrt{\sum_{k=1, \dots, n} (x^k/x^0 - y^k/y^0)^2} = (x^0 y^0)^{-1} \sqrt{\sum_{k=1, \dots, n} (y^0 x^k - x^0 y^k)^2}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (5) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად [13]:

$$(5') \quad l_{PQ}^2 = \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & x_0 & y_0 \\ \mathbf{0}^T & E_n & \mathbf{X}^T & \mathbf{Y}^T \\ x_0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ y_0 & \mathbf{Y} & 0 & 0 \end{bmatrix} : \left\{ \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & x_0 \\ \mathbf{0}^T & E_n & \mathbf{X}^T \\ x_0 & \mathbf{X} & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & y_0 \\ \mathbf{0}^T & E_n & \mathbf{Y}^T \\ y_0 & \mathbf{Y} & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

სადაც  $E_n = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$  – ერთეულოვანი  $n \times n$ -მატრიცაა,  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]$  და  $\mathbf{0} - 1 \times n$  ზომის მატრიცებია (სტრიქონებია), ხოლო ნიშნაკი  $^T$  აღნიშნავს ტრანსპონირებას. ფორმულა (5') გვიჩვენებს, რომ  $l_{PQ}^2$  ფარდობითი ინვარიანტია,  $P$  და  $Q$  წერტილების

კოორდინატების მიმართ  $r=0$  ხარისხის ერთგვაროვანი, ხოლო  $\varphi(x_i) = 0 \cdot x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$  კვადრატული ფორმის (იხ. წინადადება 2) კოეფიციენტების  $(0, 1, \dots, 1)$  მიმართ  $r=-1$  ხარისხის ერთგვაროვანი. გარდა ამისა,  $l_{PQ}^2$  ინვარიანტის წონაა  $m=-2$  (დეტერმინანტის წონაა  $m=2$ ),

ე.ი.  $l_{PQ}^2$  არაა აბსოლუტური და მის რიცხვით მნიშვნელობას არ აქვს აზრი პროექციულ გეომეტრიაში. ამისი მიზეზი კვლავ ერთეულის არარსებობაა, რომლის გარეშეც მანძილის გაზომვა შეუძლებელია (შეად. მაგალითი 2). თუ ავირჩევთ სიგრძის ერთეულს – მანძილს  $l_{01}$  რომელიმე ორ ფიქსირებულ (სხვადასხვა) წერტილს შორის – და შევადგენთ შეფარდებას

$$(6) \quad \tilde{l}_{PQ}^2 = l_{PQ}^2 / l_{01},$$

მივიღებთ აბსოლუტურ ინვარიანტს, ე.ი., კელის პრინციპის თანახმად, ევკლიდური გეომეტრიის ობიექტს.

მსგავსადვე შეიძლება ვიპოვოთ ორ  $\alpha \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$  და  $\beta \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$  ჰიპერსიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსი [13],  $\alpha: \sum a_k x_k = 0$ ,  $\beta: \sum a_k x_k = 0$ , თუ არც ერთი ეს ჰიპერსიბრტყე არ ემთხვევა უსასრულოდ დაშორებულ ჰიპერსიბრტყეს  $H_\infty$ .

**მაგალითი 4.** ვთქვათ, 2 და 3 მაგალითებში  $n=2$ , ანუ გვაქვს ევკლიდური ორგანზომილებიანი სიბრტყე  $\mathbb{E}^2$ . ორგანზომილებიანი სიმპლექსი  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  – ესაა სამკუთხედი წვეროებით  $P_0, P_1, P_2$  წერტილებში. როცა  $x_0 \neq 0$ , ამ წერტილების აფინური კოორდინატები  $\tilde{x}_i^k = x_i^k / x_0^k$  ( $i=1, 2; k=1, 2$ ) სასრულია, ე.ი. სამკუთხედი  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  მთლიანად განთავსებულია  $\mathbb{E}^2$  სიბრტყის სასრულ ნაწილში. ცხადია, სიმპლექსის „მოცულობა“ (3) არის ამ სამკუთხედის (ორიენტირებული) ფართობი (ევკლიდურ გეომეტრიაში):

$$(7) \quad V_2(P_0, P_1, P_2) = S_{\Delta P_0 P_1 P_2} = \frac{1}{2!} \det \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}_0^1 & \tilde{x}_0^2 \\ 1 & \tilde{x}_1^1 & \tilde{x}_1^2 \\ 1 & \tilde{x}_2^1 & \tilde{x}_2^2 \end{bmatrix},$$

ხოლო  $P_i P_j$  გვერდის სიგრძე გამოისახება ფორმულით

$$(8) \quad l_{P_i P_j} = \sqrt{\sum_{k=1, 2} (\tilde{x}_i^k - \tilde{x}_j^k)^2}.$$

გარდაქმნების ჯგუფი  $G$ , რომელიც ქმნის  $\mathbb{E}^2$  სიბრტყეზე ევკლიდურ გეომეტრიას, შეიცავს ოთოგონალურ გარდაქმნებს ( $\mathbb{E}^2$  სიბრტყეზე მობრუნებებსა და არეკვლებს) და ტრანსლაციებს (პარალელურ გადატანებს), ანუ გვაქვს:

$$(9) \quad G = \{g \mid g: \tilde{x}_i^k \rightarrow \tilde{x}'_i^k, k=1,2\},$$

სადაც

$$(10) \quad \tilde{x}'_i^1 = a^1_1 \tilde{x}_i^1 + a^1_2 \tilde{x}_i^2 + b_1, \quad \tilde{x}'_i^2 = a^2_1 \tilde{x}_i^1 + a^2_2 \tilde{x}_i^2 + b_2. \quad (i=\overline{1,3})$$

აქ  $A=[a^k_j]$  – ორთოგონალური მატრიცაა:

$$\sum_{j=1,2} a^k_j a^j_m = \delta^k_m, \quad (\delta^k_m = 1, \text{ როცა } k=m, \text{ და } \delta^k_m = 0, \text{ როცა } k \neq m)$$

ხოლო  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . ცნობილია (იხ., მაგ., [98], გვ. 47-49), რომ ასეთი  $G$  ჯგუფი ინვარიანტულს ტოვებს (7) და (8) ფორმულებით განსაზღვრულ სიდიდეებს. მაგრამ თუ გვინდა ვიპოვოთ ევკლიდური გეომეტრიის თეორემები, რომლებიც სამართლიანია ყველა კონგრუენტული სამკუთხედისათვის, უნდა განვიხილოთ უფრო ფართო ჯგუფი  $\tilde{G}$ , რომლის ელემენტები  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  გადასახავს ურთიერთ კონგრუენტულ სამკუთხედებს ერთმანეთში. ასეთ ჯგუფს მივიღებთ, თუ (10) გარდაქმნებს დაუმატებთ  $\{1,2,3\}$  ელემენტების გადანაცვლებებს  $\sigma$ , რომლებიც  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  სამკუთხედის წვეროებს გადაანაცვლებენ ერთმანეთში [74]. ცხადია, საზოგადოდ (თუ სამკუთხედი ტოლგვერდა არ არის), გარდაქმნა  $\sigma$  ცვლის (8) მანძილებს:

$$\sigma: l_{P_i P_j} \rightarrow l'_{P_i P_j} = l_{P_{\sigma(i)} P_{\sigma(j)}} \neq l_{P_i P_j},$$

და (7) ორიენტირებული ფართობის ნიშანს. ამიტომ არც ერთი ეს სიდიდე არ წარმოადგენს  $\tilde{G}$  ჯგუფის ინვარიანტს და არ შეიძლება ფიგურირებდეს (ცალკე აღებული სახით) ევკლიდური გეომეტრიის თეორემებში.  $\tilde{G}$  ჯგუფის ინვარიანტებს მივიღებთ, თუ შევადგენთ (7) და (8) სიდიდეების სიმეტრიულ კომბინაციებს, რომლებიც გარდაიქმნება თავის თავში  $\sigma$  გადანაცვლებების მოქმედებით. ასეთია, მაგალითად, სამკუთხედის პერიმეტრი

$$(12) \quad P_{\Delta P_0 P_1 P_2} = l_{P_0 P_1} + l_{P_1 P_2} + l_{P_2 P_0}$$

და (8) სიდიდეებით შედგენილი სხვა ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციები [59], ასევე (7) ორიენტირებული ფართობის კვადრეტი. სწორედ ამ ტერმინებშია ფორმულირებული, მაგალითად, ჰერონის ცნობილი ფორმულა

$$(13) \quad (S_{\Delta P_0 P_1 P_2})^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

სადაც აღნიშნულია  $a=l_{P_0 P_1}$ ,  $b=l_{P_1 P_2}$ ,  $c=l_{P_2 P_0}$ ,  $p=(a+b+c)/2=P_{\Delta P_0 P_1 P_2}/2$ . მართლაც, ადვილი გასახსინჯია, რომ (13) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$(13') \quad (S_{\Delta P_0 P_1 P_2})^2 = -p^4 + p^2(ab+ac+bc) - pabc = -p^4/3 + p^2(a^2+b^2+c^2)/2 - p(a^3+b^3+c^3)/3,$$

რომლის მარჯვენა მხარე შეიცავს მხოლოდ ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციების (პოლინომურ) კომბინაციას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებისგან შედგენილი ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციები შეადგენს საბაზისო ინვარიანტებს, რომლებითაც გამოსახება (პოლინომურად) სამკუთხედის დამახასიათებელი ნებისმიერი  $\tilde{G}$ -ინვარიანტი.

მაგალითი 4 ნათელს ხდის კიდევ ერთ მნიშვნელოვან პრობლემას, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული ინვარიანტების თეორიასთან და დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. ესაა მოცემული ორი ან რამდენიმე გეომეტრიული (ან ალგებრული) ობიექტის ექვივალენტობის პრობლემა. ინტუიციურ დონეზე შეიძლება მოველოდეთ, რომ ასეთ (რაიმე გაგებით) ექვივალენტურ ობიექტებს ექნებათ ერთნაირი ინვარიანტები. განხილულ მაგალითში ასეთი იყო ყველა კონგრუენტული სამკუთხედი. ნათელია, რომ კონგრუენტობის ნიშნით ყველა სამკუთხედის სიმრავლე დაიშლება ექვივალენტობის კლასებად. გეომეტრიული და ალგებრული გამოსახულებების კლასიფიკაციის ამოცანა გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფების თვალსაზრისით ისტორიულად იყო ინვარიანტთა თეორიის ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხი. ჩვენს მაგალითში დასკვნა ორი სამკუთხედის  $\Delta ABC$  და  $\Delta A'B'C'$  კონგრუენტობის შესახებ შეიძლება გაკეთდეს მათი შესაბამისი საბაზისო



ინვარიანტების

$$(14) \quad I_1 = a + b + c = 2p, \quad I_2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad I_3 = a^3 + b^3 + c^3$$

ერთმანეთთან ტოლობის შემთხვევაში (აქ  $a = l_{BC}, b = l_{AC}, c = l_{AB}$ ):

$$(15) \quad \Delta ABC \text{ კონგრუენტულია } \Delta A'B'C' \Leftrightarrow I_1 = I'_1, \quad I_2 = I'_2, \quad I_3 = I'_3.$$

ადვილი დასანახია, რომ (15) ტოლფასია სამკუთხედების ტოლობის (კონგრუენტობის) ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი ნიშნებისა. ამრიგად, მივიღივართ ამოცანამდე:

**გარდაქმნათა მოცემული  $G$  ჯგუფისათვის მოიძებნოს ფიზიკური, ალგებრული, ან გეომეტრიული ობიექტების დამახასიათებელი ინვარიანტების მინიმალური სიმრავლე, რომელიც საკმარისი იქნება კლასიფიკაციის პრობლემის გადასაჭრელად, ანუ ამ ობიექტების ექვივალენტობის კლასებად ( $G$ -ს მიმართ) დასალაგებლად.**

მაგალითისთვის მოვიხსენიოთ კვადრატული და ორადწრფივი ფორმების ექვივალენტობის საკითხები (სიღვესტრი, კელი), მატრიცების მსგავსობა (ვაიერშტრასი, უორდანი), კვადრატული ფორმების წყვილების ექვივალენტობა (ვაიერშტრასი, კრონეკერი).

**განმარტება 1.** ორი კვადრატული ფორმა  $q(x) = \sum a_{jk} x_j x_k$  და  $\tilde{q}(x) = \sum \tilde{a}_{jk} x_j x_k$  ერთმანეთის ექვივალენტურია [74], თუ არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული მატრიცა  $g \in GL_n(\mathbb{C})$ , რომ

$$(16) \quad [\tilde{a}] = g^T [a] g \Leftrightarrow \tilde{q}(x) = q(gx).$$

**განმარტება 2.** ორი  $n \times n$ -მატრიცა  $A$  და  $B$  ერთმანეთის მსგავსია (აღინიშნება  $A \sim B$ ), თუ თუ არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული მატრიცა  $g \in GL_n(\mathbb{C})$ , რომ

$$(17) \quad B = gAg^{-1}.$$

მსგავსი მატრიცებით შედგენილ ექვივალენტობის კლასებს უწოდებენ შეუღლების კლასებს, რომელთა შესასწავლად (აფინურ სივრცეში მოქმედი  $GL_n(\mathbb{C})$  ჯგუფის მიმართ), ჩვეულებრივ, იყენებენ მატრიცის უორდანის ნორმალურ ფორმას (იხ., მაგ., [42], გვ. 153-154).

**განმარტება 3.**  $X$  სიმრავლეზე მოქმედი  $G$  ჯგუფის ორბიტა  $G(x)$  ეწოდება ამ სიმრავლის ისეთი  $y \in X$  ელემენტების ქვესიმრავლეს რომლებიც მიიღება მოცემულ  $x \in X$  ელემენტზე  $G$  ჯგუფის მოქმედებით:

$$(18) \quad G(x) = \{ gx \mid g \in G \} \subset X.$$

როგორც ვხედავთ, ჯგუფის მოქმედებით სიმრავლე დაიშლება თანაკვეთების არმქონე ორბიტების გაერთიანებად. მსგავსი მატრიცების შეუღლების კლასები და ექვივალენტური ფორმები წარმოადგენენ  $G$  ჯგუფის ორბიტებს  $\mathbb{C}^2$  სივრცეში. ამდენად, მატრიცებისა და ფორმების ექვივალენტობის კლასების სტრუქტურის შესწავლა ნიშნავს  $\mathbb{C}^2$  სივრცეში  $G$  ჯგუფის ორბიტების აღწერას. მონოგრაფიაში [74] ეს შესრულებულია თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენების გამოყენებით. გეომეტრიული მიდგომა გადაგვარებების აღწერის შესაძლებლობასაც იძლევა, რაც კლასიკურ თეორიაში თითქმის არ არის ასახული.

კომბინატორული მეთოდების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ (იხ., მაგ., [74], გვ. 26-30), რომ მოცემული ზომის ნილპოტენტურ მატრიცათა შეუღლების კლასების მხოლოდ სასრული რაოდენობა არსებობს და ეს რაოდენობა ტოლია  $n \in \mathbb{N}$  რიცხვის ნატურალურ შესაკრებებად დაყოფათა  $p$  რაოდენობისა (იხ., აგრეთვე, [54]). შევნიშნოთ, რომ  $p$  ძალიან სწრაფად იზრდება, როცა იზრდება  $n$ ; მოხერხებულია მისი წარმოდგენა გრაფიკულად იუნგის სქემების საშუალებით (იხ., მაგ., [99] და [7]).

(17) განმარტებიდან აშკარაა, რომ ერთი ექვივალენტობის კლასის ყველა მატრიცის ყველა ინვარიანტი ერთნაირია. მტკიცდება [74], რომ ნებისმიერი პოლინომური ინვარიანტული ფუნქცია პოლინომურად გამოისახება ამ კლასის მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტებით, რომლებიც, ამრიგად, ორგვარ როლს ასრულებს: ერთის მხრივ, წარმოადგენს ორბიტის დამახასიათებელ პარამეტრებს, მეორეს მხრივ კი – შეადგენს მატრიცის (პოლინომური) ინვარიანტების პოლინომურ ბაზისს.

### §1.3. ინვარიანტები და ფიზიკა

კელის იდეებმა და, განსაკუთრებით, კლაინის ერლანგენის პროგრამამ ერთიან საფუძველზე დააყენა იმ დროს ცნობილი გეომეტრიული თეორიები – ევკლიდეს, რიმანის, ლობანჩევსკის გეომეტრიები, ნათელი გახადა ამ თეორიების ღრმა ნათესაური ურთიერთკავშირი, შესაძლებელი გახადა ერთიანი მიდგომის ჩარჩოებში ახალი კონსტრუქციების აგება. ეს იდეები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მეთოდოლოგიური თვალსაზრისით. მხედველობაში გვაქვს შემდეგი გარემოება:

დეკარტის მიერ გეომეტრიაში კოორდინატთა მეთოდის შემოღებამ, ერთის მხრივ, მძლავრი აღგებრული აპარატის გამოყენება გახადა შესაძლებელი; მეორეს მხრივ, ამავე მეთოდმა ანალიზური გეომეტრიის განმარტებებსა და მტკიცებულებებში შემოიტანა ერთგვარი სუბიექტურობა, დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერად არჩევის შესაძლებლობასთან. ანალიზურ ენაზე ჩამოყალიბებული ნებისმიერი გეომეტრიის თეორემა ატარებს ამ სუბიექტურობის კვალს – გამოიხატება კოორდინატებზე დამოკიდებული ფუნქციების ტერმინებში.

მაგრამ იგივე ბუნების სუბიექტურობა დამახასიათებელია ფიზიკის კანონების ანალიზური ფორმულირებებისათვისაც. მეტიც, კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერად არჩევის თავისუფლების გარდა, ფიზიკაში გვაქვს ათვლის სისტემის არჩევის თავისუფლებაც, კონფიგურაციულ და ფაზურ სივრცეში [2] კოორდინატთა გარდაქმნების შესრულების თავისუფლებაც და (კვანტურ თეორიაში) წარმოდგენის არჩევის თავისუფლებაც. ეს უკანასკნელი, ფაქტობრივად, კვლავ კოორდინატთა ნებისმიერად არჩევის თავისუფლებას ნიშნავს, ოღონდ კვანტურ მდგომარეობათა სივრცეში [4].

ჩამოთვლილი სივრცეები სხვადასხვა მათემატიკური ბუნებისაა: დადებითად განსაზღვრული ევკლიდური ან არაევკლიდური (სამგანზომილებიანი დეკარტის ან მრუდწირული კოორდინატები;  $n$ -განზომილებიანი განზოგადებული კოორდინატები კონფიგურაციულ სივრცეში), ფსევდოევკლიდური ოთხ- და მრავალგანზომილებიანი კოორდინატები ელექტროდინამიკაში (ინდეფინიტური მეტრიკა [3], [100], [101]) და სუპერსიმების თეორიაში [9], სიმპლექტური – ფაზური – სივრცე ანტისიმეტრიული მეტრიკით [86], უსასრულოგანზომილებიანი ჰილბერტის სივრცე უნიტარული (ერმიტული) მეტრიკით [4], [8], და სხვა.

კელის და კლაინის კრიტერიუმი მათემატიკური კონსტრუქციის გეომეტრიულ ობიექტად ან თეორმად მიჩნევისა – ამ კონსტრუქციის ინვარიანტობა გარდაქმნათა შესაბამისი ჯგუფის მიმართ – ფიზიკაში კარგად ცნობილი კოვარიანტობის მოთხოვნაა. ეს მოთხოვნა მინკოვსკის ოთხგანზომილებიან (ფსევდოევკლიდურ) სივრცე-დროში გვევლინება ფარდობითობის პრინციპის სახით (უფრო ზუსტად, ფარდობითობის პრინციპმა მოგვცა უფლება, გაგვეხილა ხდომილებათა მრავალსახეობა, როგორც ოთხგანზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცე-დრო). ფიზიკური თეორიისადმი (ანუ ფიზიკურ მტკიცებულებათა გარკვეული სიმრავლისადმი) ლორენც-ინვარიანტობის მოთხოვნა აუცილებელი პირობაა ამ თეორიის მიჩნევისათვის ბუნების მოვლენათა ადეკვატურ მოდელად.

ცალკე აღნიშვნას იმსახურებს ფიზიკური თანაფარდობებისადმი კოვარიანტობის მოთხოვნა ამ თანაფარდობაში შემავალი ფიზიკური ცვლადების განზომილების შეცვლის მიმართ: თანაფარდობა ძალაში უნდა რჩებოდეს და არ იცვლიდეს სახეს, თუ, მაგალითად, სიგრძის გასაზომად მეტრის ნაცვლად გამოვიყენებთ სხვა რომელიმე ერთეულს – პლანკის სიგრძეს ან პარსეკს. იგივე ითქმის ყველა სხვა ფიზიკურ სიდიდეზეც. როგორც ცნობილია, ეს იმდენად ძლიერი მოთხოვნაა, რომ მის საფუძველზე შეიქმნა ე.წ. განზომილებათა თეორია (იხ., მაგ., [102]), რომელიც, მაგალითად, ჰიდრო- და აეროდინამიკაში კვლევის ერთ-ერთ მძლავრ საშუალებას წარმოადგენს.

როგორც ნაჩვენებია იყო წინა პარაგრაფში (იხ. მაგალითები 1-3), მათემატიკური კონსტრუქციის მიჩნევისათვის ევკლიდური (აფინური) გეომეტრიის ობიექტად, ის უნდა წარმოადგენდეს ერთგვაროვან აბსოლუტურ ინვარიანტს (მოცემული ჯგუფის მიმართ).

თუ გავიხსენებთ, რომ დეკარტი იხილავდა კოორდინატებს, როგორც შეფარდებებს (მაგალითად, მონაკვეთის სიგრძისა საკოორდინატო ღერძზე არჩეულ მასშტაბთან – სიგრძის ერთეულთან), ე.ი. როგორც ერთგვაროვან აბსოლუტურ ინვარიანტებს, დავრწმუნდებით, რომ განზომილებათა თეორია, არსებითად, იგივე იდეებს ემყარება, რასაც დეკარტის კოორდინატთა მეთოდი.

ზოგადი კოვარიანტობის მოთხოვნა ნებისმიერი წერტილოვანი გარდაქმნების მიმართ (ბრტყელ – ევკლიდურ – ან გამრუდებულ სივრცეში ან სივრცე-დროში) ზოგჯერ მიაჩნდათ პირობად ფიზიკური კანონების მხოლოდ მათემატიკური ფორმულირებისადმი და არა ფიზიკური შინაარსის მქონე მოთხოვნად ბუნების მოვლენის აღმწერი კანონის მიმართ. ვ. პაულიმ (იხ. [3], გვ. 211 და იქ მითითებული შრომები) ხაზგასმით აღნიშნა, რომ, კერძოდ,  $g_{ik}$  მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების განხილვა, როგორც გრავიტაციული ველის პოტენციალებისა, ე.ი. როგორც სრულიად გარკვეული ფიზიკური შინაარსის მქონე სიდიდეებისა, ეფუძნება ფიზიკურ მოთხოვნას – ექვივალენტობის პრინციპს, რომელიც ექსპერიმენტულად შეიძლება შემოწმდეს და რომლის თანახმადაც გრავიტაციული ველი აიწერება მხოლოდ  $g_{ik}$  სიდიდეებით. ამიტომ  $g_{ik}$  არ შეიძლება ნებისმიერად იქნას არჩეული, არამედ განისაზღვრება გრავიტაციული ველის განტოლებებით. როგორც ცნობილია [3], ამ განტოლებების ფორმის პოვნა შესაძლებელია შემდეგი მოთხოვნებით:

1) გრავიტაციულ ველს (ამ ველის დიფერენციალურ განტოლებას) განსაზღვრავს მატერიის სრული ენერგია-იმპულსის ტენზორი  $T_{ik}$ ; აინშტაინი თვლის, რომ ტენზორი  $T_{ik}$  გრავიტაციული ველის განტოლებაში შედის წრფივად.

2) ტენზორი  $T_{ik}$  პროპორციულია გამოსახულებისა, რომელიც წრფივია  $g_{ik}$  მეორე რიგის წარმოებულების მიმართ (ზოგადი კოვარიანტობის მოთხოვნის შესაბამისად, წარმოებულები აიღება სივრცითი ცვლადებითაც და დროითი ცვლადითაც).

ამ ორი მოთხოვნიდან გამომდინარეობს გრავიტაციული ველის განტოლებები შემდეგი ტენზორული ტოლობის სახით:

$$(19) \quad C_1 R_{ik} + C_2 R g_{ik} + C_3 g_{ik} = \kappa T_{ik}.$$

აქ  $R_{ik}$  აღნიშნულია რიჩის ტენზორი, ხოლო  $R$  – სკალარული სიმრუდე (იხ., მაგ., [100], §92); პროპორციულობის კოეფიციენტი  $\kappa$  უზრუნველყოფს (19) განტოლების “კოვარიანტობას” განზომილების მიხედვით (უფრო ზუსტად, უზრუნველყოფს  $C_1$  და  $C_2$  ინვარიანტების უგანზომილებობას) და ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონზე გადასვლის შესაძლებლობას (არარელატივისტურ ზღვარში ვპოულობთ  $\kappa = 8\pi\alpha c^{-4}$ ,  $\alpha = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ მ}^3 \cdot \text{კგ}^{-1} \cdot \text{წმ}^{-2}$ ).

განტოლებებში (19) გასათვალისწინებელია, რომ, თანახმად ზემოთ გამოთქმული მოსაზრებებისა, ფიზიკური შინაარსის მქონე თანაფარდობები ინვარიანტული უნდა იყოს 4-სივრცეში კოორდინატთა გარდაქმნების მიმართ, ე.ი. (19) ფორმულაში შემაგალ 10 განტოლებას (10 უცნობი  $g_{ik}$  სიდიდისათვის) ედება 4 პირობა – (ბ მ ა), რომელიც 4 იგივეობის (გეომეტრიულად – სიზივიის) სახით შეიძლება ჩაიწეროს. საზოგადოდ, როგორც შენიშნა ჰილბერტმა, მართებულია [3]

**წინადადება 3.** 4-სივრცეში ჩაწერილ ნებისმიერ  $m$  კოვარიანტულ ტოლობას  $m$  უცნობით ედება 4 ბმ და მათ შორის დამოუკიდებელი თანაფარდობების რაოდენობაა  $m - 4$ .

ამ იგივეობების მოსაძებნად აინშტაინმა მოითხოვა, რომ (19) განტოლებებიდან იგივეურად გამომდინარეობდეს შენახვის კანონი ენერგია-იმპულსის  $T_{ik}$  ტენზორისათვის, რომელიც, როგორც ცნობილია [96], შეიძლება ჩაიწეროს კოვარიანტული 4-დივერგენციის გამოყენებით:

$$(20) \quad T_{l;k}^k = 0 \quad (l = \overline{0,3})$$

(კოვარიანტული გაწარმოების განმარტება და ტექნიკა იხ., მაგ., [103], [104]). (19) ფორმულის

მარცხენა მხარეში წარმოებულების გამოთვლა და (20) იგივეობების გათვალისწინება გვაძლევს [3]:

$$(C_1/2 + C_2)\sqrt{|\det(g_{kl})|} \frac{\partial R}{\partial x^l} = 0. \quad (l = \overline{0,3})$$

ამ ოთხი იგივეობიდან გამომდინარეობს საძიებელი თანაფარდობები (19) განტოლების *ინვარიანტულ* კოეფიციენტებს შორის:

$$(21) \quad C_2 = -C_1/2, \quad \forall C_3 = -\Lambda$$

(ბოლო გამოსახულებაში გამოყენებულია აინშტაინის აღნიშვნა).  $\Lambda$  კოეფიციენტის შესახებ, ზოგადი კოვარიანტობის მოთხოვნიდან გამომდინარე, შეიძლება ვთქვათ მხოლოდ ის, რომ ეს კოეფიციენტი 4-სკალარია (ინვარიანტია). მისი განზომილებაა  $m^{-2}$ , ამიტომ რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ერთეულთა არჩევაზე (შეად. მაგალითი 1); ასტრონომიული დაკვირვებები გვაძლევს ზედა ზღვარს  $|\Lambda| \leq 10^{-58} m^{-2}$  (ერთეულთა SI სისტემაში). სავსებით შესაძლებელია, რომ  $\Lambda = 0$ . მაგრამ აინშტაინის ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ჩარჩოებში  $\Lambda$  კოეფიციენტი რჩება განუსაზღვრელი. შესაძლოა, მისი დაფიქსირება მოხერხდეს ურთიერთქმედებათა გაერთიანებული თეორიის ჩარჩოებში.

შევნიშნოთ, რომ (21) პირობების გათვალისწინებით გადაწერილ (19) განტოლების

$$(22) \quad R_{lk} - g_{lk} R/2 = \kappa (T_{lk} + g_{lk} \Lambda c^4 / (8\pi \varkappa))$$

(განტოლება გრავიტაციული ველისათვის  $\Lambda$ -წევრით, აინშტაინი, 1917) მარჯვენა მხარეში შემავალ შესაკრებს  $g_{lk} \Lambda c^4 / (8\pi \varkappa)$ , დასაშვებია, მიეცეს ვაკუუმის ენერგია-იმპულსის ტენზორის ინტერპრეტაცია (იხ., მაგ., [105], გვ. 126-135). ამის საფუძველს იძლევა ამ შესაკრების დამოუკიდებლობა სივრცეში არსებული მატერიის თვისებებზე და მისი ინვარიანტობა ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. ამასთან, ვაკუუმის ენერჯიის სიმკვრივე და წნევა გამოსახება ფორმულებით

$$(23) \quad \varepsilon_\Lambda = \Lambda c^4 / (8\pi \varkappa), \quad P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\Lambda c^4 / (8\pi \varkappa).$$

ფარდობითობის ზოგად თეორიაში ინვარიანტების გამოყენების კიდევ ერთ საინტერესო მაგალითს გვაძლევს სინგულარობების ანალიზი შავი ხვრელის გრავიტაციულ ველში.

როგორც ცნობილია (იხ., მაგ., [100], გვ. 381-389), უძრავი, სფერულად სიმეტრიული სხეულის გრავიტაციულ ველში აინშტაინის განტოლებების ამონახსნი შეიძლება ჩავეწეროთ შემდეგი სახით (შვარცშილდი, 1916):

$$(24) \quad ds^2 = (1 - r_g/r) c^2 dt^2 - (1 - r_g/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

ამ გამოსახულებას აქვს სინგულარობა, როცა  $r = r_g \equiv 2m \varkappa c^{-2}$  და  $r = 0$ . მაგრამ სიმრუდის ტეზორის ინვარიანტების გამოთვლა გვაძლევს ([100]; იხ., აგრეთვე, [3], [25a, b]):

$$(25) \quad I_1 = 48^{-1} (R_{jklm} R^{jklm} - i R_{jklm} \dot{R}^{jklm}) = (r_g/2r^3)^2, \quad I_2 = 96^{-1} (R_{jklm} R^{lmpq} R_{pq}^{jk} + i R_{jklm} R^{lmpq} \dot{R}_{pq}^{jk}) = -(r_g/2r^3)^3,$$

(აქ  $\dot{R}^{jklm}$  აღნიშნავს დუალურ ტენზორს,  $\dot{R}^{jklm} = 2^{-1} E_{jkpq} R_{lm}^{pq}$ ,  $E_{jkpq}$  არის სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორი 4-სივრცეში და განმეორებული ინდექსებით იგულისხმება აჯამვა, იხ. [104]).

(25) ფორმულებიდან ვხედავთ, რომ ინვარიანტებს სინგულარობა აქვს მხოლოდ ერთ წერტილში, როცა  $r = 0$ . რაც შეეხება სინგულარობას შვარცშილდის სფეროს ზედაპირზე  $r = r_g$ , მას არ ჰქონია ინვარიანტული ხასიათი, ანუ დაკავშირებულია 4-კოორდინატების სისტემის არჩევის სპეციფიურობასთან (კერძოდ, ველის ცენტრიდან დიდ მანძილზე მეტრიკის ევკლიდურობის მოთხოვნასთან). აქვე შევნიშნოთ, რომ მეტრიკული  $g_{lk}$  ტენზორის ინვარიანტები ყოველთვის ტრივიალურია:

$$(26) \quad g_k^k = 4; \quad g_j^k g_k^j = 4; \quad \dots; \quad g_{j_1}^k g_{j_2}^{j_1} \dots g_k^{j_{n-1}} = 4.$$

ეს ნიშნავს, რომ სპეციფიურ ინფორმაციას სივრცის შესახებ გვაძლევს მხოლოდ სიმრუდის ტენზორის ინვარიანტები (25).

ინვარიანტების გამოყენების ზემოთ ჩამოთვლილი მაგალითები ეხებოდა ფარდობითობის ზოგად თეორიას, რომელიც თავისი ბუნებით გეომეტრიულია. ამიტომ შეიძლება შეიქმნას შთაბეჭდილება, რომ ეს მიდგომა შედეგადაა სწორედ გეომეტრიული ხასიათის თეორიებში. მაგრამ, რამდენადაც კოვარიანტობის მოთხოვნა სავსებით ზოგადია და მას უნდა აკმაყოფილებდეს ნებისმიერი ფიზიკური თეორია (გარდაქმნათა შესაბამისი ჯგუფის მიმართ), ინვარიანტების გამოყენებაც ნებისმიერ ფიზიკურ თეორიაშია შესაძლებელი.

მაგალითისთვის შევჩერდეთ ფორმფაქტორების მეთოდზე, რომელსაც ფართოდ იყენებენ გაბნევის მოვლენების შესწავლისას კლასიკურ და კვანტურ ფიზიკაში (იხ., მაგ., [63], [64]). ტრანსფორმაციული თვისებების თვალსაზრისით ფორმფაქტორი ნულოვანი ვალენტობის (რანგის) ტენზორია, ანუ წარმოადგენს ჯგუფის ინვარიანტს. პროცესის აღმწერი მატრიცული ელემენტის ტენზორული სტრუქტურა, როგორც წესი, ადვილი დასადგენია ზოგადი მოსაზრებების საფუძველზე, თუ ცნობილია ამ პროცესში მონაწილე ობიექტების დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეების ტრანსფორმაციული თვისებები. ამის გათვალისწინებით, გამოსაკვლევ მატრიცულ ელემენტს წარმოადგენენ (19) ფორმულის მსგავსი თანაფარდობით, განუზღვრელი ინვარიანტული (სკალარული) კოეფიციენტებით. ამ კოეფიციენტთა – ფორმფაქტორთა – რაოდენობას (და, შესაბამისად, მატრიცულ ელემენტში შემავალი ტენზორების რაოდენობას) განსაზღვრავენ მეტ-ნაკლებად ნათელი ფიზიკური მოსაზრებების, მაგალითად, მინიმალურობის, წრფივობის, სივრცე-დროითი ან/და შინაგანი სიმეტრიების გამოყენებით.

აღწერილი მიდგომის ჩარჩოებში, შრომებში [106-109] მსუბუქი ბირთვებისათვის გამოყენებულია დირაკის რელატივისტური განტოლება, რომელიც დაყვანილია შრეინგერის ტიპის განტოლებაზე (ენერგიაზე დამოკიდებული პოტენციალით), შესწავლილია რელატივისტური ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობები და სპინ-ორბიტალური გახლეჩა მსუბუქ ბირთვებში, აგრეთვე ენერგიის სპექტრი კვანტურ-მექანიკურ სისტემებში სინგულარული პოტენციალით. მიღებული შედეგები დამაკმაყოფილებლად აღწერს ექსპერიმენტულ მონაცემებს.

კიდევ რამდენიმე ცნობილი მაგალითი გვაქვს კლასიკურ ელექტროდინამიკაში.

ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობები (ვაკუუმში), როგორც ცნობილია, ინარჩუნებს ობიექტურ ფიზიკურ შინაარსს მხოლოდ სივრცული მობრუნებებისა და არეკვლების დროს, ანუ  $O_3(\mathbb{R})$  ჯგუფის მიმართ. მოძრავ ათვის სისტემაში გადასვლისას ეს სიდიდეები გარდაიქმნება ლორენცის ჯგუფის წარმოდგენებით, როგორც მეორე რანგის ანტისიმეტრიული  $F_{kl}$  4-ტენზორის კომპონენტები (იხ., მაგ., [100], §23-25). ამრიგად, ელექტრო-მაგნიტური ველის დაშლა ელექტრულ  $\vec{E}$  და მაგნიტურ  $\vec{H}$  ველებად ისეთივე პირობით (ფარდობით) ხასიათს ატარებს, როგორც ნივთიერი წერტილის მიხნევა უძრავ თუ მოძრავ ობიექტად.

$F_{kl}$  4-ტენზორის ინვარიანტები

$$(27) \quad I_1 = F_{kl} F^{kl} = \vec{E}^2 - \vec{H}^2, \quad I_2 = e^{kljm} F_{kl} F_{jm} = (\vec{E} \cdot \vec{H})^2$$

შეიძლება მოიძებნოს, როგორც მისი მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტები. მაგრამ შესაძლებელია  $F_{kl}$  ტენზორით სამგანზომილებიანი კომპლექსური ვექტორის აგება [4], [100],

$$(28) \quad \vec{F}(\mathbb{C}) = \vec{E} + i\vec{H},$$

რომელიც გარდაიქმნება  $O_3(\mathbb{C})$  ჯგუფის ვექტორული (რეგულარული) წარმოდგენებით, როდესაც  $F_{kl}$  ტენზორის შემადგენელი  $\vec{E}$  და  $\vec{H}$  ველები გარდაიქმნება ლორენცის ჯგუფის ტენზორული წარმოდგენებით ([100], გვ. 90). აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\vec{F} \in \mathbb{E}^3(\mathbb{C})$  ვექტორის (კომპლექსური) კვადრატი

$$(29) \quad \vec{F}^2 = \vec{F} \cdot \vec{F} = \vec{E}^2 - \vec{H}^2 + 2i\vec{E} \cdot \vec{H}$$

ამ გარდაქმნების ინვარიანტია. (27) ინვარიანტები (29) კომპლექსური ინვარიანტული სივრცის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებია.

ძალზე საინტერესოა, რომ (28) ვექტორიც, ზემოთ განხილული თვალსაზრისით, ფიზიკური ობიექტია. განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს ეს ვექტორი, მიიღება მაქსველის განტოლებებიდან. ამ განტოლებას აქვს ჰამილტონური ფორმა და ფორმალურად ემთხვევა დირაკის კვანტურ-მექანიკურ განტოლებას უმასო ვექტორული ნაწილაკისათვის [92]:

$$(30) \quad i\hbar\partial_t F_k = c(-i\varepsilon_{jkl})\hat{p}_j F_l.$$

აქ  $\hat{p}_j$  აღნიშნავს იმპულსის კვანტურ-მექანიკურ ოპერატორს,  $\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$ ,  $j = \overline{1,3}$ , ხოლო სამი ერმიტული მატრიცა  $\alpha_1 = -i\varepsilon_{1kl}$ ,  $\alpha_2 = -i\varepsilon_{2kl}$ ,  $\alpha_3 = -i\varepsilon_{3kl}$ , ასრულებს დირაკის მატრიცების როლს. ველის კვანტის – ფოტონის – უმასობის გამო (30) განტოლებაში პლანკის მუდმივა იკვეცება და მაქსველის განტოლებებში არ ფიგურირებს. საინტერესოა, რომ (30) განტოლების ტალღური ფუნქციის – (28) ვექტორის – მოდულის კვადრეტი ემთხვევა ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის სიმკვრივის გამოსახულებას.

შრომებში [91]-[93] გარჩეულია მოდელური ამოცანები, როდესაც ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის და სიმკვრივის პოინტინგის ვექტორის ტრანსფორმაციული თვისებები ფორმალურ წინააღმდეგობაში მოდის ენერჯიის გავრცელების სიჩქარის სასრულობასთან. ნაჩვენებია, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში, კერძოდ, არასტაციონარული ინტერფერენციის პირობებში, ენერჯიის გადანაწილება სივრცეში ხდება ფაზური სიჩქარით და არა ჯგუფური სიჩქარით. ამასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ, როგორც ცნობილია [110], სწორედ არასტაციონარული ინტერფერენციის მოვლენების ანალიზი იძლევა კრიტიკულ ინფორმაციას კვანტურ-მექანიკური ტალღური ფუნქციის ალბათური ინტერპრეტაციის სასარგებლოდ.

ასევე საყურადღებოა დამუხტული ნაწილაკის ე.წ. პიპერბოლური მოძრაობის კლასიკური პრობლემა, რომელსაც დღესაც დიდი ყურადღება ეთმობა ლიტერატურაში [3], [101], [111]. ნაშრომში [101] ინვარიანტობის მოთხოვნების (ენერჯია-იმპულსის სიმკვრივის უწყვეტობის) გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ პრობლემა მოიხსნება, თუ განვიხილავთ გამოსხივებულ ტალღას არა როგორც თავისუფალს, არამედ როგორც თავის წყაროსთან ურთიერთქმედს. ამასთან, ფიზიკურად სავსებით გამართლებულია ჩაითვალოს, რომ ელექტრომაგნიტური (ან სხვა რომელიმე) ველის ნებისმიერი წარმონაქმნი, რომელიც დამოუკიდებელ ფიზიკურ ობიექტად გვინდა განვიხილოთ, უნდა აკმაყოფილებდეს მაქსველის (ან შესაბამისი ველის) განტოლებებს. ამ მოთხოვნიდან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ განსახილველი ობიექტის შემადგენელი ველების მახასიათებლები უნდა იყოს სასრული და გლუვი, ე.ი. გააჩნდეს სასრული წარმოებულობა. ეს პირობა დარღვეულია მთელ რიგ შრომებში, რაც იქ გაკეთებულ დასკვნებს საეჭვოს ხდის (იხ. [93] და იქ ჩატარებული ანალიზი). ნაშრომი [101] თავისუფალია ამ ნაკლისგან. აქვე ნაჩვენებია, რომ ეს მოსაზრებები წარმატებით შეიძლება გამოყენებული იქნეს არაბელური ველებისათვისაც.

რელატივისტურად მბრუნავი სხეულის ამოცანა ოთხგანზომილებიანი, სწორი ტრანსფორმაციული თვისებების მქონე ფიზიკური სიდიდეების გამოყენებით განიხილებოდა ფრენკელის კლასიკურ ნაშრომებში [26a, b]. აქ გაკეთებული დაშვება ბრუნვის კინეტიკური ენერჯიისათვის კუთხურ სიჩქარეზე არარელატივისტური დამოკიდებულების სამართლიანობის შესახებ, ჩვენი აზრით, არათანმიმდევრულია და არ შეესაბამება ამ ნაშრომის დანარჩენ ნაწილში გამოყენებულ მეთოდს. შრომაში [94] ჩვენ შევასრულეთ შესაბამისი გამოთვლები და მივიღეთ დაზუსტებული შედეგები ღერძული სიმეტრიის მქონე რელატივისტურად მბრუნავი ერთგვაროვანი სხეულის  $\mathcal{E}$  ენერჯიისა და  $|\vec{M}|$  იმპულსის მომენტისათვის:

$$(31) \quad \mathcal{E} = \frac{3}{2} m_0 c^2 \beta^{-2} \left\{ 1 - \frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\}, \quad |\vec{M}| = \frac{3}{8} m_0 b c \beta^{-3} \left\{ 3 - \beta^2 - \frac{(1-\beta^2)(3+\beta^2)}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\}.$$

აქ  $m_0$ ,  $b$  და  $\beta$  აღნიშნავს, შესაბამისად, თავდაპირველად უძრავი სხეულის მასას, ეკვატორულ რადიუსს და ეკვატორის წირითი სიჩქარის შეფარდებას სინათლის  $c$  სიჩქარესთან. (31) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს, რომ ბრუნვის ენერჯიას და იმპულსის მომენტს აქვს სასრული მნიშვნელობები იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ეკვატორის წერტილების სიჩქარე აღწევს სინათლის სიჩქარეს:

$$(32) \quad \mathcal{E}|_{\beta \rightarrow 1} = \frac{3m_0 c^2}{2}, \quad M|_{\beta \rightarrow 1} = \frac{3m_0 b^2}{4} \omega_{\max} = \frac{3m_0 b c}{4}.$$

( $\omega_{\max}$  კუთხური სიხქარის მაქსიმალურად დასაშვები მნიშვნელობაა). (31) და (32) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თანაფარდობა ამ ფიზიკურ სიდიდეებს შორის (რეჟეს ტრაექტორია, [64]), ზღვარში  $\beta \rightarrow 1$  ხდება წრფივი:

$$(33) \quad \mathcal{E}|_{\beta=1-\varepsilon} = 2cb^{-1}M|_{\beta=1-\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

თანამედროვე ფიზიკაში გამოყენებული გარდაქმნის ჯგუფებიდან ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანია ყალიბრული გარდაქმნების ჯგუფი. თეორიის ინვარიანტობა ამ ჯგუფის მიმართ, რაც პირველად მოითხოვა ჰ. ვეილმა, არის ურთიერთქმედების თანმიმდევრულად შემოღების საფუძველი და სხვადასხვა ურთიერთქმედებათა გაერთიანებული თეორიის შექმნის იმედს იძლევა. ყალიბრულად ინვარიანტული თეორიებია ელექტროდინამიკაც ( $U(1)$  აბელური ჯგუფის მიმართ), ქრომოდინამიკაც ( $SU(3)$  არააბელური ჯგუფის მიმართ), რომელიც ჰადრონების შემადგენელი ნაწილაკების – კვარკებისა და გლუონების – ურთიერთქმედებას აღწერს, სუსტი ურთიერთქმედების თეორიაც, რომლის გაერთიანება ელექტროდინამიკასთან მოხერხდა  $U(1) \times SU(2)$  ყალიბრული ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული გლეშოუ-ვაინბერგ-სალამის ე.წ. სტანდარტული მოდელის ჩარჩოებში. ასეთია აინშტაინის გრავიტაციის თეორიაც – ფარდობითობის ზოგადი თეორია – რომლის ყალიბრული ინვარიანტობის ჯგუფი არის ლორენცის ჯგუფი.

მათემატიკური თვალსაზრისით, თეორიის ყალიბრული ინვარიანტობა უზრუნველყოფილია ლოკალური (სივრცე-დროით კოორდინატებზე დამოკიდებული) გარდაქმნების და ამ კოორდინატებით კოვარიანტული (ე.წ. დაგრძელებული) გაწარმოების შემოღებით,

$$(34) \quad \partial_\mu \rightarrow D_\mu = E_n \partial_\mu - ie W_\mu, \quad (\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu; \mu = \overline{0,3})$$

რაც, თავის მხრივ, მოითხოვს შესაბამისი მაკომპენსირებელი ველის  $W_\mu$  პოტენციალის შემოღებას,  $W_\mu = W_\mu^a L_a$ , (იხ., მაგ., [112], გვ. 96-103). აქ  $E_n$  – ერთეულოვანი მატრიცაა,  $L_a$  არის არჩეული ყალიბრული  $n$ -პარამეტრიანი ჯგუფის გენერატორი და აკმაყოფილებს კომუტაციურ თანაფარდობას

$$(35) \quad [L_a, L_b] = if_{abc} L_c \quad (c = \overline{1,n})$$

( $f_{abc}$  აღნიშნავს ჯგუფის სტრუქტურულ კონსტანტებს, [7]), ხოლო  $e$  – მაკომპენსირებელ, ანუ ყალიბრულ  $W_\mu$  ველთან ურთიერთქმედების კონსტანტაა.

არსებითია, რომ ყალიბრული ველის ტრანსფორმაციული თვისებები და დინამიური განტოლება განისაზღვრება თვით ყალიბრული ჯგუფით. ფორმულა (34) გვიჩვენებს, რომ ყალიბრული ველის  $W_\mu$  პოტენციალის კომპონენტები  $W_\mu^a$  უნდა გარდაიქმნებოდეს ლორენცის ჯგუფის რეგულარული (ვექტორული) წარმოდგენით.  $g(x) \in G$  ყალიბრული გარდაქმნისას პოტენციალი  $W_\mu$  და ყალიბრული ველის ტენზორი

$$(36) \quad G_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu = W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu} - ie[W_\mu, W_\nu]$$

გარდაიქმნება, შესაბამისად, ფორმულებით (იხ., მაგ., [112], §11):

$$(37) \quad W_\mu \rightarrow W'_\mu = g(x)W_\mu g^{-1}(x) - ie^{-1}g^{-1}(x)\partial_\mu g(x),$$

$$(38) \quad G_{\mu\nu} \rightarrow G'_{\mu\nu} = g(x)G_{\mu\nu}g^{-1}(x).$$

განტოლება ყალიბრული ველისათვის, რომელიც ურთიერთქმედებს დამუხტულ ველთან 4-დენის  $j_\mu^a$  სიმკვრივით, ზოგად შემთხვევაში შემდეგი სახისაა:

$$(39) \quad D^\nu G_{\mu\nu}^a = -j_\mu^a \quad (\mu = \overline{0,3}, \quad a = \overline{1,n})$$

ამ განტოლებაში გათვალისწინებულია, რომ ჰამილტონიანში ველის კვადრატის პროპორციული წევრი არ არის ინვარიანტული ყალიბრული გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ თეორიის

ყალიბრული ინვარიანტობა მოითხოვს, რომ ამ წევრთან მდგომი კოეფიციენტი  $m$  (რომელიც კვანტურ თეორიაზე გადასვლის შემდეგ შეესაბამება ყალიბრული ველის კვანტის მასას) უნდა იყოს ნულის ტოლი,  $m=0$ . ამრიგად, *ყალიბრულად ინვარიანტული ურთიერთქმედების ველის კვანტი უნდა იყოს უმასო ვექტორული (ერთის ტოლი სპინის მქონე) ნაწილაკი*. გამონაკლისია გრავიტაციული ველი, რომლისთვისაც ყალიბრული ჯგუფი, როგორც ითქვა, ემთხვევა ლორენცის ჯგუფს. ასეთი ველის პოტენციალის  $W_\mu^a$  კომპონენტებში ინდექსი  $a \rightarrow \nu$ , ე.ი. *გრავიტაციული ველის პოტენციალი ტენზორია და აქვს  $2\hbar$  სპინის კვანტი*.

მესამე შესაკრები (36) ფორმულის მარჯვენა მხარეში გვიჩვენებს, რომ არაკომუტირებადი პოტენციალები  $W_\mu$  აღწერს არაწრფივ ველს, ანუ ველს, რომლის კვანტებსაც აქვს მუხტი.

სირთულე ჩნდება იმ ურთიერთქმედებების აღწერისას, რომლებსაც ახლოქმედი ხასიათი აქვს, ანუ რომელთა გადამტანსაც, იუკავას ფუნდამენტური იდეის შესაბამისად, აქვს  $m \neq 0$ . ყალიბრული ველის ჰამილტონიანში კვანტის არანულოვანი მასის შემოღება, როგორც ვთქვით, ეწინააღმდეგება ყალიბრული ინვარიანტობის მოთხოვნას. ეს ხერხდება სიმეტრიის (ყალიბრული ინვარიანტობის) ე.წ. სპონტანური დარღვევის მეთოდის ჩარჩოებში.

სიმეტრიული (გარდაქმნის შესაბამისი ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული) არაწრფივი ჰამილტონიანის ძირითადი (უდაბლესი ენერჯიის შესაბამისი) მდგომარეობა ხდება არასიმეტრიული, როდესაც ჰამილტონიანში შემავალი არაწრფივი წევრის კოეფიციენტი გადააჭარბებს გარკვეულ კრიტიკულ მნიშვნელობას (ანუ როცა არაწრფივი ურთიერთქმედება გახდება საკმარისად ძლიერი). სიმეტრიის ასეთი დარღვევა არ ეწინააღმდეგება ზოგადი კოვარიანტობის მოთხოვნას, რადგან ძირითადი მდგომარეობა გადაგვარებულია, ე.ი. გვაქვს არა ერთი არასიმეტრიული მდგომარეობა, არამედ ასეთი მდგომარეობების სიმრავლე, თანაც ყველა მდგომარეობას ამ სიმრავლეში აქვს ერთნაირი ენერჯია და სიმეტრიული მდგომარეობიდან ძირითადში (არასიმეტრიულში) გადასვლის ერთნაირი ალბათობა. ზემოთ გამოთქმული მოსაზრებების ჩარჩოებში, ფიზიკური ობიექტია სწორედ ეს გადაგვარებული, ყალიბრულად სიმეტრიული (ინვარიანტული) მრავალსახეობა – ფიზიკური ვაკუუმი.

გადაგვარებული ძირითადი მდგომარეობების მქონე კვანტურ-სტატისტიკური სისტემების ანალიზის თანმიმდევრული მეთოდი განავითარა ნ. ნ. ბოგოლიუბოვმა 1960-იანი წლების დასაწყისში. ამ მეთოდის გამოყენებით აიხსნება ზეგამტარობის, ზედენდობის, ფერომაგნეტიზმის და მრავალი სხვა მოვლენა.

როდესაც სპონტანურად ირღვევა გლობალური სიმეტრია (ე.ი. სიმეტრია ისეთი ჯგუფის მიმართ, რომლის ელემენტები არ არის დამოკიდებული კოორდინატებზე), მაშინ თეორიაში ჩნდება ნულოვანი მასის კვანტის მქონე ველები (ე.წ. *გოლდსტოუნის ბოზონები*). მაგრამ თუ სპონტანურად ირღვევა ყალიბრული სიმეტრია, მაშინ გოლდსტოუნის ნაწილაკებიდან ერთი ან რამდენიმე (გაანჩია, სიმეტრიის დარღვევამ რამდენად მოხსნა ძირითადი მდგომარეობის გადაგვარება) ქრება, ხოლო ყალიბრული ველები იძენს მასას [5], [11a,b], [112]. ამაში მდგომარეობს მასიური ყალიბრული ველების შემოღების ე.წ. *ჰიგსის მექანიზმი*.

ჰიგსის მექანიზმის გამოყენებით აგებულია ელექტრო-სუსტი ურთიერთქმედების თეორიამ იწინასწარმეტყველა სუსტი ველის კვანტების –  $W^\pm$  და  $Z^0$  ნაწილაკების არსებობა [11a,b]. ამასთან, ნაპოვნი იქნა თანაფარდობები – სიზივიები – ელექტრომაგნიტური და სუსტი ურთიერთქმედებების კონსტანტებს (მუხტებს) შორის, აგრეთვე სხვადასხვა არასტაბილური ნაწილაკების სიცოცხლის ხანგრძლივობებსა და  $U(1) \times SU(2)$  ყალიბრული ჯგუფის სხვა ინვარიანტებს შორის [5]. ამ თანაფარდობებიდან ნაპოვნი  $W^\pm$  და  $Z^0$  ნაწილაკების მასების მნიშვნელობა დაადასტურა ამჩქარებელზე (CERN, 1983) შესრულებულმა ექსპერიმენტებმა. ამავე თეორიით ნაწინასწარმეტყველები ე.წ. ჰიგსის ველის კვანტი (ეს სწორედ ის ველია, რომელსაც შემოაქვს არაწრფივობა ჰამილტონიანში) ექსპერიმენტზე ჯერ არ არის აღმოჩენილი. სხვადასხვა გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ ამ ველის (და მისი კვანტის) ტრანსფორმაციული თვისებების შესწავლა, მასთან დაკავშირებული ინვარიანტების პოვნა არის ამ ნაწილაკის ამჟამად მიმდინარე ძებნის ერთ-ერთი ძირითადი მიმართულება.



### §1.4. სიმეტრიების გაფართოება. სუპერსივრცე

ჰიგსის ველის კვანტის – *ჰიგსის ბოზონის* – თვისებების დაზუსტება, შესაძლოა, მოხერხდეს თანამედროვე თეორიული ფიზიკის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ჯგუფის – ე.წ. *სუპერსიმეტრიის* ჯგუფის გამოყენებით [113-117]. ეს ჯგუფი განსხვავდება ლის ჩვეულებრივი ჯგუფებისგან იმით, რომ მისი ზოგიერთი გენერატორი სპინორია. შედეგად, სუპერსიმეტრიული ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები აერთიანებს ნაწილაკებს, რომელთა სპინები განსხვავდება ერთმანეთისგან  $\hbar/2$  სიდიდით, ანუ ფერმიონებსა და ბოზონებს. სუპერსიმეტრიის გარდაქმნის ორჯერ თანმიმდევრულად შესრულებისას ბოზონები გადადის ბოზონებში, ფერმიონები – ფერმიონებში, ხოლო სისტემა მთლიანად წაინაცვლებს სივრცე-დროში. ამასთან, ვექტორული ( $\hbar$  სპინის მქონე) ნაწილაკები უკავშირდება სკალარულ ნაწილაკებს. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს დავაკავშიროთ ყალიბრული ველის კვანტები –  $W^\pm$  და  $Z^0$  ვექტორული ბოზონები, ფოტონი, გლუონები – ჰიგსის სკალარულ ნაწილაკთან. ცხადია, სუპერსიმეტრია უნდა იყოს არა ზუსტი, არამედ დარღვეული – ზუსტი სიმეტრიისას ჩამოთვლილი ნაწილაკების მასები ერთნაირი უნდა ყოფილიყო – მაგრამ, თუ სიმეტრიის დარღვევა ხდება სპონტანურად, მაშინ დინამიური სიმეტრია შენარჩუნებული რჩება, ე.ი. არსებობს თანაფარდობები სხვადასხვა, კერძოდ, ჰიგსის ნაწილაკის მონაწილეობით მიმდინარე პროცესების დამახასიათებელ კონსტანტებს შორის. ეს, თავის მხრივ, გვაძლევს ინფორმაციას სხვადასხვა ნაწილაკების მასებისა და თვით ჰიგსის ნაწილაკის მასის შესახებ [116b].

სუპერსიმეტრიის თეორიაში ლის ალგებრას ენაცვლება *ლის სუპერ-ალგებრა* და მისი წარმოდგენები, რომლებიც ოპერატორების კომუტატორებთან ერთად შეიცავს ანტიკომუტატორებსაც [113], [114a,b]<sup>1</sup>.

**განმარტება 4.** *ლის სუპერ-ალგებრა ეწოდება ვექტორული  $L_0, L_1$  სივრცეების პირდაპირ ჯამს – ვექტორულ სივრცეს  $L=L_0 \oplus L_1$ , რომელშიც გვაქვს ორადწრფივი ასახვები:*

$$a) [X, Y]: L_0 \times L_0 \rightarrow L_0, \quad b) [X, Y]: L_0 \times L_1 \rightarrow L_1, \quad c) \{X, Y\}: L_1 \times L_1 \rightarrow L_0;$$

*ასახვა a) ანტისიმეტრიულია, b) არასიმეტრიულია, ხოლო c) – სიმეტრიული, ამასთან, შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

$$(40) \quad \begin{aligned} & [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0, \quad (X, Y \in L_0, Z \in L_1) \\ & [X, \{Y, Z\}] + \{Z, [X, Y]\} + \{Y, [Z, X]\} = 0, \quad (X \in L_0, Y, Z \in L_1) \\ & [X, \{Y, Z\}] + \{Z, [X, Y]\} + \{Y, [Z, X]\} = 0. \quad (X, Y, Z \in L_1) \end{aligned}$$

**განმარტება 5.** *ლის სუპერ-ალგებრის წარმოდგენა ეწოდება ლის სუპერ-ალგებრას, რომელშიც ალგებრის  $X$  ელემენტები ჩანაცვლებულია  $T(X)$  ოპერატორებით ისე, რომ*

$$(41) \quad \begin{aligned} T([X, Y]) &= [T(X), T(Y)], \quad (X \in L_0; Y \in L_0 \text{ ან } Y \in L_1) \\ T(\{X, Y\}) &= \{T(X), T(Y)\}, \quad (X, Y \in L_1) \end{aligned}$$

*სადაც კვადრატული (ფიგურული) ფრჩხილები (41) ფორმულების მარჯვენა მხარეში აღნიშნავს ოპერატორების კომუტატორს (ანტიკომუტატორს).*

მაგალითად, პუანკარეს ჯგუფის (ლორენცის ჯგუფს + სივრცე-დროში ტრანსლაციების გარდაქმნები) სუპერ-ალგებრა შედგება პუანკარეს ჯგუფის ლის  $L_0$  ალგებრისგან [117]

$$(42) \quad [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu, \quad [P_\mu, P_\nu] = 0,$$

რომელსაც ემატება 8-განზომილებიანი  $L_1$  სივრცე ბაზისით  $\psi_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha, \alpha = \overline{1, 4}$ :

$$(42') \quad \begin{aligned} [M_{\mu\nu}, \psi_\alpha] &= (\sigma_{\mu\rho})_\alpha^\beta \psi_\beta, \quad [M_{\mu\nu}, \tilde{\psi}^\alpha] = -\psi^\beta (\sigma_{\mu\rho})_\beta^\alpha, \quad [P_\mu, \psi_\alpha] = [P_\mu, \tilde{\psi}^\alpha] = 0, \\ \{\psi_\alpha, \psi_\beta\} &= \{\tilde{\psi}^\alpha, \tilde{\psi}^\beta\} = 0, \quad \{\psi_\alpha, \tilde{\psi}^\beta\} = (\gamma^\mu)_\alpha^\beta P_\mu. \end{aligned}$$

აქ  $\gamma_\mu$  აღნიშნავს დირაკის მატრიცებს,  $\sigma_{\mu\nu} = 1/4[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ , ხოლო  $\psi_\alpha, \alpha = \overline{1, 4}$ , სპინორებია.

<sup>1</sup> მონოგრაფიაში [6] და ზოგიერთ სხვა წყაროში [114b] სტატიის მისამართი მითითებულია არაზუსტად.

$P_\mu$  და  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$  აღნიშნავს პუანკარეს ჯგუფის გენერატორებს – იმპულსის 4-ვექტორს და იმპულსის მომენტის ანტისიმეტრიულ 4-ტენზორს.

პუანკარეს სუპერ-ალგებრა მოქმედებს სუპერსიმეტრიულ სივრცეში, ანუ ისეთი (გლუვი) ფუნქციების სიმრავლეზე, რომლებიც დამოკიდებულია  $(x^\mu, \theta^a)$  ცვლადებზე. აქ  $x^\mu$  მინკოვსკის სივრცის – საზოგადოდ, D-განზომილებიანი სივრცე-დროის – კოორდინატებია, ხოლო  $\theta^a$  აღნიშნავს ანტიკომუტირებად კოორდინატებს, რომლებიც  $x^\mu$  კოორდინატების ლორენც-გარდაქმნებისას გარდაიქმნება სპინორებით.

როგორც ვხედავთ, სუპერსიმეტრიული გარდაქმნები იწვევს გარდაქმნებს მინკოვსკის სივრცეში, რაც ნიშნავს, რომ სუპერ-ალგებრის მიმართ ინვარიანტობის მოთხოვნა შეიცავს სივრცე-დროითი სიმეტრიების მოთხოვნასაც. საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ ოპერატორები (42) და (42') ფორმულებში მოქმედებს ლოკალურად (ანუ დამოკიდებულია კოორდინატებზე) და პუანკარეს სუპერ-ალგებრის ჩარჩოებში მოექცევა ლორენცის ყალიბრული ჯგუფი, რაც გრავიტაციის აღწერის შესაძლებლობასაც მოგვცემს.

**მაგალითი 5.** თავისუფალი უმასო ნაწილაკის ქმედების სუპერსიმეტრიულ განზოგადებას აქვს შემდეგი სახე [6] ( $\dot{x}^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau$  და ა.შ.):

$$(43) \quad S = \int d\tau \eta_{\mu\nu} (\dot{x}^\mu(\tau) - i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta}) (\dot{x}^\nu(\tau) - i\bar{\theta}\gamma^\nu\dot{\theta}).$$

ქმედება (43) აღწერს ნაწილაკის მოძრაობას სუპერსივრცეში კოორდინატებით  $(x^\mu, \theta^a)$ . აქ  $\bar{\theta}^a$  აღნიშნავს  $\theta^a$  სპინორის დირაკის შეუღლებულს.  $\tau$  ნებისმიერი უწყვეტი პარამეტრია ნაწილაკის D-განზომილებიანი  $x^\mu(\tau)$  ტრაექტორიის გასწვრივ;  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, (D-1)$ ;  $\eta_{\mu\nu}$  – მინკოვსკის მეტრიკაა D-განზომილებიან სივრცე-დროში.

აღმოჩნდა [6], რომ თუ (43) ქმედებაში  $\theta^a$  ცვლადებად ავირჩევთ ორ უმასო სპინორულ ველს, დაკვანტვის შემდეგ მივიღებთ აინშტაინის (გაწრფივებული) განტოლებების სუპერსიმეტრიულ გაფართოებას.

სუპერსიმეტრიის ერთ-ერთი მოთხოვნის თანახმად, ყოველ ფერმიონს (ბოზონს) უნდა შეესაბამებოდეს მისი სუპერსიმეტრიული “მეწყვილე” ბოზონი (ფერმიონი). მსგავსი რამ ბუნებაში არ დაიმზირება და არც ამანქარებლებზე მიმდინარე ექსპერიმენტებმა გვიჩვენა რამე – დღეისათვის ურთიერთ სუპერსიმეტრიული ნაწილაკების არც ერთი წყვილი არ არის აღმოჩენილი. ვარაუდობენ, რომ ცნობილი ნაწილაკების ყველა სუპერპარტნიორს აქვს ძალიან დიდი მასა. ამიტომ, მიუხედავად თეორიის ფორმალური წარმატებებისა, სასურველია არაპირდაპირი დაკვირვებითი ფაქტების მითითება, რომლებიც დაადასტურებენ ბუნებაში სუპერსიმეტრიის არსებობას. ერთ-ერთი ასეთი დემონსტრაციაა თ. ხაჩიძისა და ა. ხელაშვილის მიერ შესრულებული კეპლერის კლასიკური და კვანტური ამოცანის ანალიზი [118] და სუპერსიმეტრიის მოთხოვნიდან კულონური პოტენციალის თეორიულად გამოყვანა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ბუნებაში კულონური პოტენციალის არსებობა და ამ პოტენციალთან დაკავშირებული ლაპლას-რუნგე-ლენცის მოძრაობის ინტეგრალი ([2], გვ. 134) მეტყველებს ბუნებაში სუპერსიმეტრიის რეალური არსებობის სასარგებლოდ.

ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ჩარჩოებში სივრცე-დროის გეომეტრია განისაზღვრება დინამიკით. იგივე შეიძლება ითქვას ფარდობითობის ზოგადი თეორიის სუპერსიმეტრიულ გაფართოებაზე – *სუპერგრავიტაციაზე* და თეორიაზე, რომელიც მიიღება სუპერსიმეტრიის გაერთიანებით *სიმების თეორიასთან – სუპერსიმების თეორიაზე*.

თავდაპირველად სიმების თეორია ჩამოყალიბდა გ. ვენეციანოს მიერ (1968) შექმნილი მოდელის საფუძველზე. ეს მოდელი შემოღებული იყო მაღალი სპინების მქონე ჰადრონების (ძლიერად ურთიერთქმედი ნაწილაკების) გაბნევის ამპლიტუდის აღსაწერად და ემყარება ჰადრონების ურთიერთქმედებაში აღმოჩენილი *დუალურობის* მოვლენას (იხ., მაგ., [48]), რომელიც, თავის მხრივ, გაბნევის ამპლიტუდის სპეციფიურ სიმეტრიას – ე.წ. *კროსინგ-სიმეტრია*ს უკავშირდება. ამ სიმეტრიის მოთხოვნის დასაკმაყოფილებლად ვენეციანომ ჩაწერა გაბნევის ამპლიტუდა ეილერის ბეტა-ინტეგრალის სახით [49]:

$$(44) \quad A(s, t) = \int_0^1 x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} dx = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}.$$

აქ  $\Gamma(z)$  არის ეილერის გამა-ფუნქცია,  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $t = (p_2 + p_3)^2$ , აღნიშნავს მანდელსტამის რელატივისტურად ინვარიანტულ ცვლადებს ( $p_1, p_2$  და  $p_3, p_4$  – გაბნევაში მონაწილე ბოზონების საწყისი და საბოლოო 4-იმპულსებია, შესაბამისად), ხოლო  $\alpha(z)$  არის რეჯეს ტრაექტორია, რომელიც ვენეციანომ ჩათვალა წრფივად:  $\alpha(z) = \alpha(0) + \alpha'z$  (როგორც ცნობილია [64], [48], რეჯეს ტრაექტორია აერთიანებს სხვადასხვა მასის და სპინის ნაწილაკებს, რომლებსაც დანარჩენი კვანტური რიცხვები ერთნაირი აქვს, ანუ გვიჩვენებს მასის დამოკიდებულებას ნაწილაკის სპინზე). კროსინგ-სიმეტრიის  $A(s, t) = A(t, s)$  მოთხოვნა (ბოზონებისათვის) დაკმაყოფილებულია (44) განმარტების თანახმად.

ვენეციანოს (44) ამპლიტუდას აქვს სწრაფად კლებადი მაღალენერგეტიკული ასიმპტოტიკა. ფიქსირებული და დიდი  $|s|$  ცვლადების არეში ეს ასიმპტოტიკა ხარისხოვანია,

$$(45) \quad A(s, t) \sim s^{\alpha'} \quad (\alpha' > 0)$$

რაც ფიზიკურ არეში ( $t < 0$ ) იძლევა სწრაფ კლებას, როცა  $s \rightarrow \infty$ . კიდევ უფრო სწრაფია კლება, როცა ფიქსირებულია გაბნევის კუთხე და  $s \rightarrow \infty$ . ამ დროს [63]

$$2t = -s(1 - \cos\theta_c)$$

და  $s \rightarrow \infty$  გვაძლევს  $t \rightarrow -\infty$ ,  $t/s = C < \infty$ . მაშინ (43) ამპლიტუდა ექსპონენციალურად კლებულობს ენერჯიის ზრდასთან ერთად:

$$(45') \quad A(s, t) \sim [F(\theta_c)]^{-\alpha(s)}.$$

ასეთი სწრაფი კლება არ ახასიათებს ველის კვანტური თეორიის არც ერთ მოდელს (შეშფოთების თეორიის ჩარჩოებში); (45) და (45') ასიმპტოტიკები აიხსნება იმით, რომ მრავალი რეზონანსისა და პოლუსის წვლილი გაბნევის ამპლიტუდაში ურთიერთ შეიკვეცა.

ჰადრონების დინამიკის აღსაწერად, როგორც აღვნიშნეთ შესავალში, ფორმულა (44) არ გამოდგა, მაგრამ განვითარებული მიდგომა სასარგებლო აღმოჩნდა გრავიტაციის კვანტური თეორიის აგებისათვის, ვინაიდან ასეთივე (44) სახე აქვს არაწერტილოვანი რელატივისტური ობიექტების – (ბოზონური) სიმების – ერთმანეთზე გაბნევის ამპლიტუდასაც. მთავარი პრობლემა კვანტური გრავიტაციის თანმიმდევრული აგების გზაზე არის თეორიის გადაუნორმვალობა, რაც დაკავშირებულია გრავიტაციული ველის კვანტის – გრავიტონის –  $2\hbar$  ტოლ სპინთან და შესაბამისი პროპაგატორების განშლადობებთან მაღალ ენერჯიებზე. მაგრამ ვენეციანოს ფორმულა კარგად აღწერს მაღალი სპინის ნაწილაკებს და აქვს კარგი მაღალენერგეტიკული ასიმპტოტიკა. ამიტომ სიმების გაბნევის ამპლიტუდისათვის (44) ფორმულის მიღებისთანავე დაიწყეს მისი გამოყენება კვანტური გრავიტაციის მოდელში [6].

სიმების და სუპერსიმების თეორიებისათვის დამახასიათებელია “ფეინმანის დიაგრამების” გაცილებით ნაკლები რაოდენობა: შეშფოთების თეორიის ყოველ რიგში სიმებისათვის გვაქვს მხოლოდ თითო დიაგრამა [6]. ეს თავისებურება და კარგი მაღალენერგეტიკული ყოფაქცევა შეიძლება ავხსნათ ისევე, როგორც ჰადრონების ამპლიტუდის “კარგი” ყოფაქცევა: სიმების – არაწერტილოვანი ობიექტების – ურთიერთქმედება ხდება არა ერთ წერტილში, არამედ სიმის რხევის მთელ სიგრძეზე. გაბნევის ამპლიტუდა, არსებითად, აღწერს მერხევი სიმების მოდების ურთიერთქმედების კოლექტიურ ეფექტს. ამიტომ გვაქვს დამოუკიდებელი დიაგრამების მცირე რაოდენობა. ამასთან, სხვადასხვა მოდების წვლილები ერთმანეთს აკომპენსირებს, რითაც აიხსნება ამპლიტუდის კლებადი ასიმპტოტიკა მაღალი ენერჯიების ზღვარში. ფაქტიურად, არაწერტილოვანი ობიექტების ურთიერთქმედების აღწერისას შეშფოთების თეორიის მწკრივი ნაწილობრივ უკვე აჯამულია (მოდების უსასრულო რაოდენობით) და ამ აჯამვისას ხდება ველის კვანტური თეორიისათვის (სიმის თითოეული წერტილისათვის კი ასეთი თეორია უნდა იყოს მართებული) დამახასიათებელი განშლადობების კომპენსირება; საინტერესო იქნებოდა სიმების თეორიის “მიკროსკოპული დაფუძნება” ველის კვანტური თეორიის ჩარჩოებში, ანალოგიურად სტატისტიკური კანონების მიკროსკოპული დაფუძნებისა.

## §1.5. ფუნქციონალური დამოუკიდებლობა ბმებიან სისტემებში

საზოგადოდ, მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე თეორიაში ამა თუ იმ სახის კომპენსირებები მეტყველებს ამ თავისუფლების ხარისხთა შორის *ბმების* არსებობაზე. ბმები დამახასიათებელია ნებისმიერი ყალიბრულად ინვარიანტული თეორიისთვის.

**მაგალითი 6.** თავისუფალი უმასო ნაწილაკის ქმედების ფუნქციონალური D-განზომილებიან ფსევდო-ევკლიდურ სივრცე-დროში ჩაიწერება შემდეგი სახით [5]:

$$(46) \quad S = \int d\tau e(\tau) \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)$$

აქ  $\tau$  ნებისმიერი უწყვეტი პარამეტრია ნაწილაკის D-განზომილებიანი  $x^\mu(\tau)$  ტრაექტორიის გასწვრივ;  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, (D-1)$ ;  $\eta_{\mu\nu}$  – მინკოვსკის მეტრიკაა D-განზომილებიან სივრცე-დროში. ფუნქცია  $e(\tau)$  უზრუნველყოფს S ქმედების ინვარიანტობას  $\tau$  პარამეტრის შეცვლისას [84]. მართლაც, ყალიბრული გარდაქმნა

$$(47) \quad \tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau), \quad e(\tau) \rightarrow \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} e(\tilde{\tau})$$

ინვარიანტულს ტოვებს (46) მარჯვენა მხარეს. ამ ინვარიანტობიდან გამომდინარეობს მუდმივობის კანონი

$$(48) \quad d/d\tau (\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0.$$

მაგრამ (46) ფორმულიდან, გარდა  $\ddot{x}^\mu = 0$ ,  $\mu = 0, D-1$ , მოძრაობის განტოლებებისა, გამომდინარეობს “მოძრაობის განტოლება”

$$(49) \quad \delta S / \delta e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

(49) წარმოადგენს ბმას, რომელიც ედება ყალიბრულად ინვარიანტულ, ე.ი. ფიზიკურ, შენახვად  $T = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  სიდიდეს და გვიხვენებს, რომ (46) ქმედების მინიმუმი მიიღწევა მინკოვსკის D-განზომილებიანი სივრცე-დროის სინათლის-მაგვარ გეოდეზიურებზე. ამასთან, განტოლებები  $\ddot{x}^\mu = 0$  არ გვაძლევს  $T = 0$  პირობას; ამ განტოლებებიდან გამომდინარეობს მხოლოდ მუდმივობის კანონი (48). ამრიგად, (49) წარმოადგენს საწყის პირობებზე დადებულ შეზღუდვას – თუ  $T = 0$  საწყის  $\tau = 0$  მომენტში, მაშინ, (48) თანახმად, ეს სამართლიანია  $\tau$  ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ასეთი ხასიათის ბმები დამახასიათებელია ნებისმიერი ყალიბრულად ინვარიანტული სისტემისათვის. მაგალითად, ელექტროდინამიკაში გაუსის კანონი  $\delta S / \delta A_0 = 0$  არ გამომდინარეობს მაქსველის დანარჩენი განტოლებებიდან, მაგრამ ამ განტოლებებიდან მიიღება მუდმივობის კანონი  $\delta S / \delta A_0$  სიდიდისათვის და თუ ეს წარმოებული ნულის ტოლია საწყის მომენტში, ის ნულის ტოლი დარჩება მუდამ.

**მაგალითი 7.** განვიხილოთ ქმედების ფუნქციონალური D-განზომილებიანი სიმისთვის.

სიმი – ესაა ერთგანზომილებიანი წირი  $X^\mu(\sigma)$ ,  $\mu = 0, (D-1)$ , სადაც  $\sigma$  პარამეტრია. ჩვეულებრივ, იღებენ  $\sigma \in [0, \pi]$ . დროში ევოლუციისას სიმი შემოწერს სივრცე-დროით ზედაპირს, რომელიც წერტილოვანი ნაწილაკის მსოფლიო წირის ორგანზომილებიანი ანალოგია. აღვნიშნოთ  $\sigma^\alpha = (\sigma^1, \sigma^2)$  ორგანზომილებიანი ვექტორი, ისე რომ  $d^2\sigma = d\sigma^1 d\sigma^2$  გვაძლევდეს ამ მსოფლიო ზედაპირის ფართის ელემენტს.

სიმის ქმედებად ირჩევენ სიმის მიერ შემოწერილი მსოფლიო ფართის პროპორციულ სიდიდეს [6]:

$$(50) \quad S = -T/2 \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu.$$

აქ  $h_{\alpha\beta}$  და  $h^{\alpha\beta}$  აღნიშნავს მეტრიკულ ტენზორებს სიმის მსოფლიო ზედაპირზე;  $h = |\det[h_{\alpha\beta}]|$ . რადგანაც (50) ქმედებაში ცვლადი  $h_{\alpha\beta}$  ციკლურია, სიმის მსოფლიო ზედაპირის მოძრაობის განტოლება  $\delta S / \delta h_{\alpha\beta} = 0$  წარმოადგენს ბმას.

ბმები ჩნდება ნებისმიერ ფიზიკურ დინამიურ თეორიაში. ასეთი სისტემების შესწავლა აუცილებლად მოითხოვს ბმების კორექტულ გათვალისწინებას, კერძოდ, დაკვანტვისას. საკითხთა ეს მნიშვნელოვანი წრე შესწავლილია შრომებში [119a,b]-[121].

შრომაში [41] შემოღებულია ფუნქციების *პირობითი დამოუკიდებლობის* ცნება.

პირობით ფუნქციონალურად დამოკიდებული (დამოუკიდებელი) ფუნქციების ცნების გამოყენება მოსახერხებელია მრავალი ზოგადი და გამოყენებითი ხასიათის ამოცანის შესწავლისას (იხ., მაგ., [41], [119-121]). აღნიშნულ გარკვეული ანალოგია პირობითი ექსტრემუმის ამოცანასთან, რომლის დაყვანა აბსოლუტური ექსტრემუმის ამოცანაზე თუმცა შესაძლებელია, მაგრამ, საზოგადოდ, დაკავშირებულია ამოცანის სიმეტრიის დაკარგვასთან და გამოკვლევების შესაბამის გართულებასთან. სიმეტრიის შესანარჩუნებლად ასეთ ამოცანებში სარგებლობენ ლაგრანჟის განუზღვრელ მამრავლთა ცნობილი მეთოდით (იხ., მაგ., [97], n°212, გვ. 470-471).

შრომაში [41] ნაპოვნია ფუნქციების პირობითი დამოუკიდებლობის კრიტერიუმი. ამავე ნაშრომში ეს ცნება და კრიტერიუმი გამოყენებულია მატრიცების უნიტარული ინვარიანტების ბაზისის შესასწავლად.

ვთქვათ,  $n, m \in \mathbb{N}$  და გვაქვს  $n+m$  დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლებიც დამოკიდებულია  $n+m$  ცვლადებზე  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ :

$$(51) \quad f_i : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n+m},$$

ამასთან, ვთქვათ, ნულისგან განსხვავდება იაკობიანი  $J_1$ :

$$J_1 = \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n+m})}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)} \neq 0,$$

ხოლო ცვლადები  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  აკმაყოფილებს პირობებს (“ბმის განტოლებებს”)

$$(52) \quad \phi_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

სადაც თითოეული ფუნქცია  $\phi_j : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ , არის დიფერენცირებადი  $n+m$  არგუმენტით  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  და ნულისგან განსხვავდება იაკობიანი  $J_2$ :

$$(53) \quad J_2 = \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0.$$

როგორც ცნობილია (იხ., მაგ., [97], n°208, გვ. 453-459), თუ პირობა (53) შესრულებულია, ბმის განტოლებები (52) (ბმის პირობები) განსაზღვრავს ცხადი სახით მოცემულ ფუნქციებს  $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n), j = \overline{1, m}$ , და (51) ასახვა განსაზღვრავს  $x_1, \dots, x_n$  ცვლადების რთულ ფუნქციებს:

$$(54) \quad f_i = f_i\{(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))\}, \quad i = \overline{1, n+m}.$$

**განმარტება 6.** ფუნქციებს (51) ვუწოდებთ პირობით ფუნქციონალურად დამოკიდებულს (დამოუკიდებელს) ბმის (52) პირობებით, თუ შესაბამისი რთული ფუნქციები (54) არის ფუნქციონალურად დამოკიდებული (დამოუკიდებელი), ანუ თუ იაკობიანი  $\det[f_{i,k}]$  უდრის (არ უდრის) ნულს. აქ აღნიშნულია

$$(55) \quad f_{i,k} = \partial_{x_k} f_i + \sum_{l=1}^m (\partial_{y_l} f_i)(\partial_{x_k} y_l), \quad i, k = \overline{1, n},$$

და  $\partial_{x_k} y_l$  ცალსახად განისაზღვრება განტოლებათა სისტემით

$$(56) \quad 0 = \partial_{x_k} \phi_j + \sum_{l=1}^m (\partial_{y_l} \phi_j)(\partial_{x_k} y_l), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

ნაშრომში [41] დამტკიცებულია თეორემა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ფუნქციების პირობითი ფუნქციონალური დამოკიდებულება (დამოუკიდებლობა) ისე, რომ არ გამოვიყენოთ (54) ცხადი ფუნქციები, რაც, საზოგადოდ, გარდა (53) ბმის განტოლებების ამოხსნასთან დაკავშირებული აშკარა გართულებებისა, იწვევს ამოცანის სიმეტრიის დაკარგვას და დამატებით სირთულეებს ქმნის ხოლმე.

**თეორემა.** თუ (51) ფუნქციების არგუმენტები  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  აკმაყოფილებს ბმის (52) პირობებს, მაშინ პირობით ფუნქციონალურად დამოკიდებულია ის  $n$  ფუნქცია სიმრავლიდან  $\{f_i \mid i = \overline{1, n+m}\}$ , რომელთათვისაც ნულის ტოლია იაკობიანი

$$(57) \quad J = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n, \phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)} = \det \begin{bmatrix} \partial_{x_k} f_i & \partial_{y_l} f_i \\ \partial_{x_k} \phi_j & \partial_{y_l} \phi_j \end{bmatrix}.$$

თუ  $J \neq 0$ , მაშინ ფუნქციები  $f_1, \dots, f_n$  პირობითად ფუნქციონალურად დამოკიდებულია.

**დამტკიცება.** შემოვიღოთ შემოკლებული აღნიშვნები იაკობის მატრიცებისათვის, როგორც შრომაში [41]:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \in M_{n+m}, \quad \Phi = [\Phi_1 \mid \Phi_2] \in M_{m, n+m}, \quad Y = [\partial_{x_k} y_l] \in M_{n, m},$$

სადაც

$$\begin{aligned} F_{11} &= [\partial_{x_k} f_i] \in M_n, & F_{12} &= [\partial_{y_l} f_i] \in M_{n, m}, & i &= \overline{1, n}, \\ F_{21} &= [\partial_{x_k} \phi_j] \in M_{m, n}, & F_{22} &= [\partial_{y_l} \phi_j] \in M_m, & i &= \overline{n+1, n+m}, \\ \Phi_1 &= [\partial_{x_k} \phi_j] \in M_{m, n}, & \Phi_2 &= [\partial_{y_l} \phi_j] \in M_m, & j &= \overline{1, m} \\ & & & & (k &= \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

ამ აღნიშვნებში ფორმულები (55) და (56) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(58) \quad [f_{i,k}] = F_{11} + F_{12} Y, \quad -\Phi_1 = \Phi_2 Y,$$

ამასთან

$$J_1 = \det F \neq 0, \quad J_2 = \det \Phi_2 \neq 0.$$

ამიტომ გვქვია:

$$(59) \quad \det [f_{i,k}] = \det [F_{11} + F_{12} Y] = \det [F_{11} - F_{12} \Phi_2^{-1} \Phi_1].$$

გამოვიყენოთ აქ ფრობენიუსის ფორმულა ბლოკ-უჯრედოვანი მატრიცის დეტერმინანტისათვის (იხ., მაგ., [42], გვ. 58-59)

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{22} \det [A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}]$$

$$(A_{11} \in M_n, \quad A_{12} \in M_{n, m}, \quad A_{21} \in M_{m, n}, \quad A_{22} \in M_m, \quad \det A_{22} \neq 0).$$

შედაგად მივიღებთ:

$$(60) \quad \det [f_{i,k}] = J_2^{-1} \det \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} = J / J_2.$$

ამრიგად, პირობები  $\det [f_{i,k}] = 0$  და  $J = 0$  ურთიერთ ტოლფასია. ■

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

**შედეგი.** თუ (51) და (52) ფორმულებში  $\phi_j = f_{n+j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , და  $J_1 \neq 0$ , ანუ, თუ ბმის პირობები დადებულია ფუნქციონალურად დამოკიდებული  $n+m$  ფუნქციების (51) სიმრავლის  $m$  ელემენტზე  $f_{n+j} = 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ , მაშინ

$$\det [f_{i,k}] = J_1 / J_2 \neq 0$$

და (51) სიმრავლის დანარჩენი  $n$  ელემენტი  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , არის პირობით ფუნქციონალურად დამოკიდებული.

მიღებული შედეგები გამოყენებული იქნება დისერტაციის მომდევნო თავებში.

## I თავის დასკვნები

1. აღნიშნულია ინვარიანტთა კლასიკური თეორიის განვითარების მთავარი ეტაპები.
2. ნაჩვენებია ინვარიანტების თეორიის ადგილი და მნიშვნელობა ელემენტარული გეომეტრიაში და თანამედროვე ალგებრულ გეომეტრიაში.
3. ნაჩვენებია ინვარიანტების თეორიის მნიშვნელობა ზოგიერთი თანამედროვე ფიზიკური თეორიისათვის. ნაჩვენებია, რომ ფიზიკური ობიექტები, ისევე, როგორც გეომეტრიული ობიექტები, აიწერება ორთოგონალური და უნიტარული ჯგუფების ინვარიანტებით, ხოლო ფიზიკური კანონები, რომლებიც აკავშირებს ამ ფიზიკურ ობიექტებს, ისევე, როგორც გეომეტრიული თეორემები, წარმოადგენს თანაფარდობებს (სიზიგიებს) გარდაქმნათა შესაბამისი ჯგუფის (პოლინომურ) ინვარიანტებს შორის.
4. ნაჩვენებია, რომ (პოლინომურ) ინვარიანტებს შორის თანაფარდობების (ბმების) შესწავლა შეადგენს ნებისმიერი ფიზიკური თეორიის შინაარსს.
5. დასაბუთებულია გამოკვლევის შერჩეული მიმართულების აქტუალურობა, ჩამოყალიბებულია ნაშრომის ძირითადი მიზანი, განსაზღვრულია მისი მეცნიერული სიახლე და მნიშვნელობა.
6. განმარტებულია ფუნქციონალურად პირობით დამოუკიდებელი ფუნქციები (ფ-ბი (54-56)). დამტკიცებულია თეორემა ფუნქციების ფუნქციონალურად პირობითი დამოუკიდებლობისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობების შესახებ (ფ-ლა (57)).

## თავი II

ოპერატორების ინვარიანტები  
და კლასიფიცირება

ოპერატორების და მათი მატრიცების უნიტარული მსგავსების ამოცანა ცენტრალურია უკვე საუკუნეზე მეტი ხნის განმავლობაში. აქ მიღებული შედეგებიდან აღსანიშნავია შპეხტის [16] და კ.პირსის [17a,b] თეორემები  $n \times n$  მატრიცების უნიტარული მსგავსებისათვის საკმარისი პირობების შესახებ, ჯ.სმიტის [18], სპენსერის [23], სიბირსკის [24], ჟელობენკოს [122] შედეგები  $3 \times 3$  მატრიცებისთვის (იხ. აგრეთვე მონოგრაფია [20] და იქ მოყვანილი ციტირება). ამოცანა ბოლომდე გადაწყვეტილია შრომებში [40] და [41], სადაც აგებულია ერმიტული და არაერმიტული ოპერატორების უნიტარული ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური და ფუნქციონალური ბაზისი  $n$ -განზომილებიან უნიტარულ (ეკვილიბრ) სივრცეში და ნაპოვნია ოპერატორთა უნიტარული (ორთოგონალური) ექვივალენტობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობები ცხადი სახით, მათი პოლინომური ინვარიანტების ტერმინებში.

ამ თავში მოყვანილი ორიგინალური შედეგები გამოქვეყნებულია შრომებში [40], [41], [43], [67], [96].

## §2.1. ძირითადი ცნებები და დებულებები

წინამდებარე პარაგრაფებში  $\mathbb{U}^n$  აღნიშნავს  $n$ -განზომილებიან უნიტარულ სივრცეს, ანუ წრფივ ვექტორულ სივრცეს კომპლექსური რიცხვების  $\mathbb{C}$  ველზე, რომელშიც განმარტებულია ერმიტული მეტრიკული ფორმა (ერმიტული სკალარული ნამრავლი). როგორც ცნობილია (იხ., მაგ., [42], გვ. 233-239), სასრულ-განზომილებიან უნიტარულ  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ ორთონორმირებული ბაზისი:

$$(1) \quad \mathcal{B}^n = \{ \vec{e}_k \mid \vec{e}_k \in \mathbb{U}^n, k = \overline{1, n} \},$$

$$(2) \quad \langle \vec{e}_k, \vec{e}_j \rangle \equiv g_{kj} = g_{jk}^* = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle^* = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, n},$$

სადაც  $\delta_{kj}$  აღნიშნავს კრონეკერის სიმბოლოს, ხოლო  $*$  – კომპლექსური შეუღლების ოპერაცია. იქ, სადაც ეს არ გამოიწვევს გაურკვევლობას, შემდგომში დავწერთ  $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}$ .

განვიხილოთ ოპერატორი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ , რომელიც მოქმედებს  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში:

$$\mathbf{P}: \vec{x} \rightarrow \vec{y} \equiv \mathbf{P}\vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{U}^n.$$

$\mathcal{B} \subset \mathbb{U}^n$  ბაზისში გვექნება (იხ., მაგ., [98], გვ. 41):

$$(3) \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n y^i \vec{e}_i = \mathbf{P}\vec{x} = \sum_{k=1}^n x^k \mathbf{P}\vec{e}_k.$$

ვექტორი  $\mathbf{P}\vec{e}_k \in \mathbb{U}^n$  შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\mathcal{B}$  ბაზისში. (2) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(4) \quad \mathbf{P}\vec{e}_k = \sum_{i=1}^n P_k^i \vec{e}_i, \quad \langle \vec{e}_m, \mathbf{P}\vec{e}_k \rangle = P_{mk} = \sum_{i=1}^n g_{mi} P_k^i, \quad k = \overline{1, n},$$

და (3) ფორმულაში შეტანის და გამარტივების შემდეგ გვექნება:

$$(3') \quad y^i = \sum_{k=1}^n x^k P_k^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

ფორმულა (4) გვიჩვენებს, რომ  $P = [P_k^i]$  მატრიცის  $k$ -ურ სტრიქონში დგას  $\mathbf{P}\vec{e}_k \in \mathbb{U}^n$  ვექტორის კოორდინატები  $\mathcal{B}$  ბაზისში,  $k = \overline{1, n}$ . ამრიგად,  $P = [P_{ik}]_1^n \in M_n(\mathbb{C})$ , სადაც  $M_l(\mathbb{F})$  აღნიშნავს (იხ. შრომა [44a,b] და მიმოხილვა [20]) ყველა ისეთი  $l \times l$  მატრიცის სიმრავლეს, რომელთა ელემენტები ეკუთვნის  $\mathbb{F}$  ველს,  $l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . ქვემოთ გვექნება  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  ან  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .



$\mathbb{U}^n$  სივრცეში ორთონორმირებული ბაზისის არჩევა შესაძლებელია მრავალნაირად.  $\mathcal{B}$  ბაზისის ნებისმიერი გარდაქმნა, რომელიც ინარჩუნებს სკალარულ ნამრავლს (2),

$$(5) \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' = \{ \bar{e}'_j \mid \bar{e}'_j \in \mathbb{U}^n, \bar{e}'_j = \sum_{k=1}^n U_j^k \bar{e}_k, j = \overline{1, n} \},$$

$$(6) \quad \langle \bar{e}'_k, \bar{e}'_j \rangle = \langle \bar{e}_k, \bar{e}_j \rangle = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, n},$$

სორციელდება უნიტარული ოპერატორით

$$(7) \quad \mathbf{U}: \bar{e}_j \rightarrow \bar{e}'_j = \mathbf{U} \bar{e}_j = \sum_{k=1}^n U_j^k \bar{e}_k, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(8) \quad \mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^{-1}, \quad |\det[U_j^k]| = 1,$$

ამასთან,  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცა გარდაიქმნება კანონით:

$$(9) \quad P_i^k \rightarrow P_i^{k'} = \sum_{j, m=1}^n U_i^j U_m^k {}^* P_j^m = (UPU^+)_i^k = (UPU^{-1})_i^k.$$

ცხადია, რომ

$$(9') \quad P_i^k = \sum_{j, m=1}^n U_i^{j*} U_m^k P_j^{m'} = (U^+ P' U)_i^k = (U^{-1} P' U)_i^k.$$

**განმარტება 1.**  $Q$  მატრიცას, რომელიც მიიღება მოცემული  $P$  მატრიცის გარდაქმნით:

$$(10) \quad Q_{ik} = (V^{-1} P V)_{ik},$$

სადაც  $V = [V_{ik}]$  არის ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული მატრიცა,  $\det V \neq 0$ , ეწოდება მოცემული  $P$  მატრიცის *მსგავსი* და აღინიშნება  $Q \sim P$ . თუ გარდამქმნელი მატრიცა  $V$  არის უნიტარული  $V^{-1} = V^+$ ,  $|\det V| = 1$ , მაშინ  $Q$  და  $P$  მატრიცებს ეწოდებათ *უნიტარულად მსგავსი*.

ამრიგად, (7)-(9) ფორულებიდან გამომდინარეობს, რომ მართებულია

**წინადადება 1.** ნებისმიერი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცები ორ ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში არის ურთიერთ უნიტარულად მსგავსი.

რადგან უნიტარული გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს,  $n \times n$  მატრიცების  $M_n(\mathbb{C})$  სიმრავლე იშლება ექვივალენტობის კლასებად უნიტარული მსგავსების თვალსაზრისით – *ორბიტებად* (იხ., მაგ., [73], გვ. 67), ამასთან, თითოეული ორბიტა შეიცავს ერთი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის შესაბამის მატრიცებს  $\mathbb{U}^n$  სივრცის ყველა ორთონორმირებულ ბაზისში.  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში მოქმედი სხვადასხვა ოპერატორის მატრიცები შეიძლება იყოს უნიტარულად მსგავსი, მაგრამ განსხვავებულ ბაზისებში, ე.ი. *სხვადასხვა ორბიტები არ გადაიკვეთება*.

**განმარტება 2.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის *საკუთარი რიცხვი* ეწოდება ისეთ  $p_j \in \mathbb{C}$  რიცხვს, რომლისთვისაც  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში არსებობს არანულოვანი ვექტორი  $\bar{x}(p_j) \in \mathbb{U}^n$ , ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(11) \quad \mathbf{P} \bar{x}(p_j) = p_j \bar{x}(p_j). \quad (\bar{x}(p_j) \neq 0)$$

ამავე ტოლობას ხშირად ჩაეწეროთ შემოკლებული სახით:

$$(11') \quad \mathbf{P} \bar{x}_j = p_j \bar{x}_j. \quad (\bar{x}_j \neq 0)$$

(არანულოვან) ვექტორს  $\bar{x}(p_j) \in \mathbb{U}^n$ , რომელიც აკმაყოფილებს (11) ტოლობას, ეწოდება  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის *საკუთარი ვექტორი*.

ოპერატორის *საკუთარ რიცხვს* ხშირად უწოდებენ ამ ოპერატორის *მახასიათებელ რიცხვს*, ან *საკუთარ მნიშვნელობას* (იხ., მაგ., [42], გვ. 82-84, [8a], გვ. 21-22, [8b], გვ. 29).

სასრულგანზომილებიან უნიტარულ სივრცეში მართებულია შემდეგი დებულებები:

**წინადადება 2.** ნებისმიერ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს აქვს არანაკლებ ერთი და არაუმეტეს  $n$  სხვადასხვა საკუთარი რიცხვი.

**წინადადება 3.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარი რიცხვები და საკუთარი ვექტორები არ არის დამოკიდებული  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში ბაზისის არჩევაზე, ე.ი.

**წინადადება 3'.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარი ვექტორები და საკუთარი რიცხვების სიმრავლე არ იცვლება (ინვარიანტულია)  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში ბაზისის ნებისმიერი გარდაქმნებისას.

წინადადება 3 იძლევა საშუალებას, მოვძებნოთ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარი ვექტორები რომელიმე ბაზისში, როგორც შემდეგი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემის არატრივიალური ამონახსნები:

$$(12) \quad \sum_{k=1}^n x^k(p_j) P_k^i = p_j x^i(p_j). \quad (i=\overline{1,n}, j=1,2,\dots)$$

აქ  $P_k^i$  არის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცა არჩეულ ბაზისში, ხოლო  $x^i(p_j) = \bar{x}(p_j) \in \mathbb{U}^n$  საკუთარი ვექტორის კოორდინატები ამავე ბაზისში. ამასთან, გვაქვს

**წინადადება 4.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარი რიცხვები  $p_1, p_2, \dots$  განისაზღვრება (12) განტოლებათა სისტემის არატრივიალური ამონახსნის არსებობის პირობით

$$(13) \quad \det [P_k^i - p \delta_k^i]_1^n = 0,$$

რომელიც, ალგებრული თვალსაზრისით, წარმოადგენს  $n$  ხარისხის მულტიპოლიფიციენტების განტოლებას და, მაშასადამე, აქვს ზუსტად  $n$  კომპლექსური ფესვი (ფესვთა ჯერადობის გათვალისწინებით).

(13) განტოლებას ეწოდება  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მახასიათებელი განტოლება. ხშირად (იხ., მაგ., [42], გვ. 82)) მას უწოდებენ სეკულარულ ან საუკუნობრივ განტოლებას. ამ განტოლების მარცხენა მხარეში მდგარ  $n$  ხარისხის მრავალწევრს ეწოდება  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ( $P_{ik}$  მატრიცის) მახასიათებელი მრავალწევრი (მახასიათებელი პოლინომი).

**წინადადება 5.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტები ინვარიანტულია  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში ბაზისის უნიტარული გარდაქმნების მიმართ.

ცხადია, იგივე წინადადება შეიძლება ჩამოყალიბდეს მეორენაირად:

**წინადადება 5'.** (უნიტარულად) მსგავსი მატრიცების მახასიათებელი მრავალწევრები იგივეურად ტოლია.

წინადადება 5' იძლევა მატრიცების (ოპერატორების) უნიტარული მსგავსებისათვის აუცილებელ, მაგრამ, საზოგადოდ, არასაკმარის პირობებს. ეს პირობები არის საკმარისიც, თუ ოპერატორი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  მთლიანად განისაზღვრება თავისი საკუთარი რიცხვებით, თუნდაც ერთ რომელიმე ორთონორმირებულ ბაზისში.

**წინადადება 6.** ნებისმიერი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორისათვის  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში არსებობს ერთადერთი ოპერატორი  $\mathbf{P}^+$ , რომელიც ნებისმიერი ორი ვექტორისათვის  $\bar{x} \in \mathbb{U}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{U}^n$  აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(14) \quad \langle \bar{x}, \mathbf{P}^+ \bar{y} \rangle = \langle \mathbf{P} \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \mathbf{P} \bar{x} \rangle^*. \quad (\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{U}^n).$$

(14) განმარტებიდან ცხადია, რომ

$$(15) \quad (\mathbf{P}^+)^+ = \mathbf{P}.$$

ოპერატორებს  $\mathbf{P}$  და  $\mathbf{P}^+$  ეწოდებათ ერთმანეთის შეუღლებული ოპერატორები.

ადვილი საჩვენებელია, რომ  $\mathbf{P}^+$  და  $\mathbf{P}$  ოპერატორების შესაბამისი მატრიცები  $P^+$  და  $P$  ნებისმიერ (ორთონორმირებულ) ბაზისში არის ურთიერთ ტრანსპონირებული და კომპლექსურად შეუღლებული:

$$(16) \quad P^+ = P^{T*}.$$

მართლაც, (4), (15) და (14) ტოლობების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$P_{ik}^* = \langle \vec{e}_i, \mathbf{P}\vec{e}_k \rangle^* = \langle \vec{e}_i, (\mathbf{P}^+)^+ \vec{e}_k \rangle^* = \langle \mathbf{P}^+ \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle^* = \langle \vec{e}_k, \mathbf{P}^+ \vec{e}_i \rangle = P_{ki}^+.$$

$$P_i^{k*} = \langle \vec{e}_i, \mathbf{P}\vec{e}_k \rangle^* = \langle \vec{e}_i, (\mathbf{P}^+)^+ \vec{e}_k \rangle^* = \langle \mathbf{P}^+ \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle^* = \langle \vec{e}_k, \mathbf{P}^+ \vec{e}_i \rangle = P_{ki}^+.$$

ასეთ მატრიცებს უწოდებენ *ურთიერთ შეუღლებულ* (ზოგჯერ – *ერმიტულად შეუღლებულ*) *მატრიცებს*.

**განმარტება 3.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს ( $P$  მატრიცას) ეწოდება *მარტივი სტრუქტურის ოპერატორი* (მატრიცა), თუ (12) განტოლებათა სისტემას გააჩნია  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, ე.ი. თუ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარი ვექტორები ადგენენ ბაზისს  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში. ამ ბაზისს ეწოდება  $\mathbf{P}$  ოპერატორის *საკუთარი ბაზისი*.

**წინადადება 7.** თუ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვი მარტივია, ე.ი. თუ ამ ოპერატორს აქვს  $n$  ერთმანეთისგან განსხვავებული საკუთარი რიცხვი, მაშინ ეს ოპერატორი მარტივი სტრუქტურისაა.

**მართლაც,** ვთქვათ, (11') განტოლება სრულდება  $n$  წყვილ-წყვილად ერთმანეთისგან განსხვავებული საკუთარი რიცხვისათვის  $p_j \neq p_k$ , როცა  $j \neq k$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ . დაეუშვათ, არსებობს ისეთი მუდმივები  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , რომ

$$(17) \quad \sum_{j=1}^n c_j \vec{x}_j = \vec{0}. \quad (\vec{x}_j \neq \vec{0})$$

ვიმოქმედოთ (17) ტოლობის ორივე მხარეზე თანამიმდევრულად  $\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^{n-1}$  ოპერატორებით ( $\mathbf{P}^k$  აღნიშნავს  $\mathbf{P}$  ოპერატორის  $k$ -ურ ხარისხს) და გავითვალისწინოთ (11'). მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^n (p_j)^{k-1} c_j \vec{x}_j = \vec{0}. \quad (k = \overline{1, n}, \vec{x}_j \neq \vec{0})$$

ვინაიდან ამ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი არის

$$(18) \quad \det[p_j^{k-1}]_1^n = \prod_{1 \leq m < j \leq n} (p_j - p_m) \neq 0,$$

გვექნება  $c_j \vec{x}_j = \vec{0}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . აქედან,  $\vec{x}_j \neq \vec{0}$  პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ  $c_j = 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ , რაც, (17) დაშვების ძალით, ნიშნავს, რომ ვექტორები  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{U}^n$  წრფივად დამოუკიდებელია, ე.ი. ადგენს ბაზისს  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში. ■

**წინადადება 8.** მარტივი სტრუქტურის ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი აგრეთვე მარტივი სტრუქტურისაა.

**წინადადება 9.** თუ ურთიერთ შეუღლებულ ოპერატორებს  $\mathbf{P}$  და  $\mathbf{P}^+$  აქვს საერთო საკუთარი ვექტორი, მაშინ ამ ოპერატორების საკუთარი რიცხვები, რომლებიც შეესაბამება საერთო საკუთარ ვექტორს, ერთმანეთის კომპლექსურად შეუღლებულია.

**განმარტება 4.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს ( $P$  მატრიცას) ეწოდება *ნორმალური ოპერატორი* (ნორმალური მატრიცა), თუ ის კომუტირებს თავის შეუღლებულ  $\mathbf{P}^+: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორთან ( $P^+$  მატრიცასთან).

**წინადადება 10.** ოპერატორი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ნორმალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მას აქვს საკუთარი ვექტორების სრული ორთონორმირებული სისტემა ან თუ  $\mathbf{P}$  და  $\mathbf{P}^+$  ოპერატორების საერთო საკუთარი ვექტორები ადგენს (ორთონორმირებულ) ბაზისს  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში. ამრიგად, ნორმალური ოპერატორი ყოველთვის მარტივი სტრუქტურისაა.

**წინადადება 11.** ნებისმიერი ოპერატორის მატრიცას ამ ოპერატორის საკუთარ ბაზისში (თუკი ასეთი ბაზისი არსებობს) აქვს დიაგონალური სახე:

$$(19) \quad P_{jk}^0 = \langle \bar{e}_j, \mathbf{P} \bar{e}_k \rangle_{\mathbf{P}} = p_j \delta_{jk}, \quad k, j = \overline{1, n}.$$

კერძოდ, ნორმალური  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცა ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში უნიტარულად მსგავსია (19) დიაგონალური მატრიცის. იგივე მართებულია შეუღლებული  $\mathbf{P}^+: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცისათვისაც. ამასთან,  $\mathbf{P}$  და  $\mathbf{P}^+$  ოპერატორების მატრიცები ამ ოპერატორების (საერთო ორთონორმირებულ) საკუთარ ბაზისში არის ერთმანეთის კომპლექსურად შეუღლებული:

$$(20) \quad \langle \bar{e}_j, \mathbf{P}^+ \bar{e}_k \rangle_{\mathbf{P}} = \langle \bar{e}_j, \mathbf{P} \bar{e}_k \rangle_{\mathbf{P}}^* = p_j^* \delta_{jk}, \quad k, j = \overline{1, n}.$$

**განმარტება 5.**  $\mathbf{H}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს ( $H$  მატრიცას) ეწოდება თვითშეუღლებული (ერმიტული), თუ ის ემთხვევა თავის შეუღლებულ  $\mathbf{H}^+: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს ( $H^+$  მატრიცას):

$$(21) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+, \quad H = H^+.$$

ამ განმარტებიდან და (20) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს

**წინადადება 12.** ნორმალური ოპერატორი ერმიტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ: ამ ოპერატორის ყველა საკუთარი რიცხვი ნამდვილია; ამ ოპერატორის მატრიცა ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში უნიტარულად მსგავსია ნამდვილ ელემენტებიანი დიაგონალური მატრიცის.

წინადადება 12 გვიჩვენებს, რომ შეგვიძლია ისე ავირჩიოთ ორთონორმირებული ბაზისი, რომ (14) მატრიცის დიაგონალური ელემენტები – ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვები – იყოს დალაგებული და შეადგენდეს არაკლებად მიმდევრობას:

$$(22) \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n.$$

თუ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვების  $\mathcal{P} = \{p_j\}$  სიმრავლის ყველა ელემენტი სხვადასხვაა, ე.ი. თუ ამ ოპერატორის მახასიათებელ განტოლებას არ აქვს ჯერადი ფესვები, ვიტყვით, რომ ოპერატორის სპექტრი მარტივია. ასეთ შემთხვევაში (22) თანაფარდობაში გვექნება მკაცრი უტოლობები.

**განმარტება 6.** მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული  $\mathbf{H}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის საკუთარ ბაზისს, რომელშიც საბაზისო ვექტორები გადანომრილია (22) პირობების შესაბამისად, ვუწოდოთ ამ ოპერატორის კანონიკური ბაზისი და აღვნიშნოთ  $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$ , ხოლო  $\mathbf{H}$  ოპერატორის მატრიცას  $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$  ბაზისში – ამ ოპერატორის კანონიკური მატრიცა.

შევნიშნოთ, რომ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი (ორთონორმირებული) ბაზისი განსაზღვრულია ბაზისის ვექტორების ნუმერაციის სიზუსტით. ცხადია, ბაზისის ვექტორების გადანომვრა (რაც, ცხადია, წარმოადგენს უნიტარულ გარდაქმნას  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში) ცვლის ოპერატორის საკუთარი რიცხვების ნუმერაციას. (22) პირობები აფიქსირებს მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული  $\mathbf{H}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის კანონიკური ბაზისის ვექტორთა ნუმერაციას, ამიტომ კანონიკური მატრიცის ინვარიანტობის ჯგუფს რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს  $U(n)$  ჯგუფის ქვეჯგუფს, აღწერს შემდეგი

**წინადადება 13.** მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის კანონიკური მატრიცის ინვარიანტობის ჯგუფი შედგება უნიტარული ოპერატორებისაგან, რომლებსაც ამ ოპერატორის კანონიკურ ბაზისში შეესაბამება დიაგონალური მატრიცები  $U = \text{diag} \{e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}\}$ :

$$(23) \quad U_{jk} = \delta_{jk} \exp(i\varphi_j). \quad (\varphi_j \in \mathbb{R}, \quad j, k = \overline{1, n})$$

ცხადია, (23) მატრიცები კომუტირებს ერმიტული ოპერატორის კანონიკურ მატრიცასთან.

**წინადადება 14.** მარტივი სპექტრის მქონე ორი ერმიტული ოპერატორი  $H_1: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  და  $H_2: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ , რომელთა კანონიკური მატრიცები ერთნაირია, ურთიერთ უნიტარულად მსგავსია:

$$(24) \quad H_1 = U^{-1} H_2 U \quad (U^{-1} = U^+).$$

წინადადება 14 წარმოადგენს ოპერატორთა უნიტარული კლასიფიცირების საფუძველს: ორი ოპერატორის შესაბამისი მატრიცები (ორთონორმირებულ ბაზისში) ეკუთვნის ერთ ორბიტას (ანუ ურთიერთ უნიტარულად მსგავსია), თუ ამ ოპერატორების კანონიკური მატრიცები ერთმანეთის ტოლია.

**წინადადება 15.** ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი  $P: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ცალსახად შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი “ერმიტული კომპონენტის” საშუალებით:

$$(25) \quad P = P_+ + iP_-,$$

$$(26) \quad P_+ = (P + P^+)/2 = P_+^+, \quad P_- = -i(P - P^+)/2 = P_-^+.$$

ამასთან, ოპერატორი  $P: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ნორმალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ერმიტული კომპონენტები (26) კომუტირებს.

წინადადება 15 და 10 გვაძლევს შემდეგ შედეგს:

**წინადადება 16.** ნორმალური  $P: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის “ერმიტულ კომპონენტებს”  $P_{\pm}$  აქვს საერთო საკუთარი ვექტორების (ორთონორმირებული) სრული სისტემა; მაშასადამე, მათი მატრიცები  $P_+$  და  $P_-$  შეიძლება ერთდროულად დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე; ამავ ბაზისში დიაგონალური იქნება (25) ოპერატორის  $P = P_+ + iP_-$  მატრიცაც, ამასთან,

$$(27) \quad P_{jk} = \delta_{jk}(p_j^{(+)} + ip_j^{(-)}),$$

სადაც  $p_j^{(\pm)}$  არის  $P_{\pm}$  ოპერატორის ( $P_{\pm}$  მატრიცის) საკუთარი რიცხვები,  $j = \overline{1, n}$ .

მართებულია შემზღვებულიც: უნიტარული გარდაქმნით (27) სახეზე დაიყვანება მხოლოდ ნორმალური ოპერატორის მატრიცა.

შევნიშნოთ, რომ თუ ნორმალური  $P: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ერმიტული კომპონენტებიდან ერთს მაინც აქვს მარტივი (ნამდვილი) სპექტრი, მაშინ  $P$  ოპერატორის სპექტრიც მარტივია.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ, თუმცა  $P_+$  და  $P_-$  ოპერატორების საკუთარი ბაზისები ემთხვევა ერთმანეთს, მათ შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა კანონიკური ბაზისი მაშინაც კი, როცა ორივე ოპერატორის სპექტრი მარტივია.

$\mathbb{U}^n$  სივრცის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ევკლიდური სივრცე  $\mathbb{E}^n$  – წრფივი ვექტორული  $n$ -განზომილებიანი სივრცე ნამდვილ რიცხვთა ველზე დადებითად განსაზღვრული მეტრიკული ფორმით.

$\mathbb{E}^n$  სივრცეში ბაზისის ორთონორმირების პირობას ინარჩუნებს ნამდვილი უნიტარული გარდაქმნა – ორთოგონალური გარდაქმნა. ასეთი გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც უწოდებენ ორთოგონალურ ჯგუფს და აღნიშნავენ  $O(n)$  (იხ., მაგ., [7], გვ. 338-339).

ვინაიდან ნამდვილ რიცხვთა ველი არ არის ალგებრულად ჩაკეტილი, ზემოთ ჩამოთვლილი დებულებებიდან ზოგიერთი შეიცვლება. ერმიტული ოპერატორის ნაცვლად  $\mathbb{E}^n$  სივრცეში უნდა განვიხილოთ სიმეტრიული (ნამდვილი ერმიტული) ოპერატორი, რომელსაც აქვს საკუთარი ვექტორების სრული ორთოგონალური სისტემა (გააჩნია საკუთარი ორთონორმირებული ბაზისი  $\mathbb{E}^n$  სივრცეში) და რომლის ყველა საკუთარი რიცხვი ნამდვილია. ნაცვლად (25), (26) წარმოდგენებისა, ნებისმიერი  $T: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორისათვის გვაქვს:

$$(28) \quad T = T_+ + T_-, \quad T_{\pm} = (T \pm T^T)/2,$$

სადაც ზედა ინდექსი  $T$ , ისევე, როგორც ზემოთ, აღნიშნავს ტრანსპონირებას.

ჩამოთვლილი დებულებების დამტკიცებულია, მაგ., მონოგრაფიებში [20], [42], [123].

## §2.2. მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის ინვარიანტები

როგორც აღვნიშნეთ წინა პარაგრაფში,  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში ბაზისის უნიტარული გარდაქმნა (7) იწვევს ამ სივრცეში მოქმედი ნებისმიერი  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მატრიცის გარდაქმნას (9) ფორმულებით ( $\mathbb{E}^n$  სივრცეში ნაცვლად (7) გარდაქმნებისა, უნდა განვიხილოთ ბაზისის ორთოგონალური გარდაქმნები. ქვემოთ უნიტარული და ეკვილიდური (ნამდვილი) სივრცეები განვიხილება პარალელურად). ამასთან, 2.5 წინადადების თანახმად, მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი არ იცვლება.

$\mathbf{P}$  ოპერატორის ( $\mathbf{P}$  მატრიცის) მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტები, რომლებიც, ვიეგის თეორემის ძალით, ურთიერთ ცალსახად განისაზღვრება ოპერატორის (მატრიცის) საკუთარი რიცხვებით, წარმოადგენს ამ ოპერატორის (მატრიცის) *უნიტარულ (ორთოგონალურ) ინვარიანტებს*.

შეიძლება ვთქვათ, რომ  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მატრიცის ელემენტები შეიცავს “ობიექტურ” ინფორმაციას ოპერატორის შესახებ, რომელიც არ იცვლება სივრცეში ბაზისის გარდაქმნისას, და “სუბიექტურ” ინფორმაციას, რომელიც განისაზღვრება ბაზისის არჩევით და ბაზისის გარდაქმნისას იცვლება. ჩვენი გამოკვლევის მთავარი მიზანია, დავადგინოთ, ოპერატორის რამდენი და რომელი ინვარიანტები გვაძლევს ამ ოპერატორის მატრიცაში ჩადებული “ობიექტური” ინფორმაციის პოვნის, “შერეული” ინფორმაციისგან ამ “ობიექტური” ინფორმაციის გამოყოფის შესაძლებლობას.

განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სივრცე

$$\mathbb{U}_{\vec{x}}^1 = \{ \vec{x}t \mid t \in \mathbb{C}, \vec{x} \in \mathbb{U}^n, \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1 \} \subset \mathbb{U}^n$$

და შემოვიღოთ ოპერატორი  $\mathbf{P}_{\vec{x}}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}_{\vec{x}}^1$ , რომელიც განმარტებულია შემდეგი ტოლობით:

$$(29) \quad \mathbf{P}_{\vec{x}}: \vec{y} \rightarrow \vec{x} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{U}_{\vec{x}}^1, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{U}^n.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (29) ფორმულა განსაზღვრავს *პროექციულ ოპერატორს*:

$$\mathbf{P}_{\vec{x}}^2 = \mathbf{P}_{\vec{x}}.$$

მართლაც, (29) განმარტებიდან გვაქვს:

$$\mathbf{P}_{\vec{x}}^2: \vec{y} = \mathbf{P}_{\vec{x}}: \vec{x} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \mathbf{P}_{\vec{x}}: \vec{y}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{U}^n.$$

თანამედროვე ლიტერატურაში ფართოდ იყენებენ დირაკის მიერ შემოღებულ ე.წ. “კეტ-” და “ბრა-ვექტორებს”. “კეტ-ვექტორს” აღნიშნავენ  $|\vec{x}\rangle$  სიმბოლოთი; განმარტებით,  $|\vec{x}\rangle = \vec{x} \in \mathbb{U}^n$ . “ბრა-ვექტორი” აღინიშნება სიმბოლოთი  $\langle \vec{y}|$  და განიმარტება, როგორც 1-ფორმა კეტ-ვექტორებზე (იხ., მაგ., [8a], გვ. 54). განმარტების თანახმად, გვაქვს  $\langle \vec{y}| = |\vec{y}\rangle^\dagger$ . ამ აღნიშვნებში პროექციული ოპერატორი  $\mathbf{P}_{\vec{x}}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}_{\vec{x}}^1$  ჩაიწერება, როგორც  $\mathbf{P}_{\vec{x}} = |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|$ .

**წინადადება 17.** ვექტორები  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{U}^n$  შეადგენს სრულ ორთონორმირებულ სისტემას (ორთონორმირებულ ბაზისს)  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა (ე.წ. სისრულის პირობა (იხ., მაგ., [8a], გვ. 54)):

$$(30) \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{P}_{\vec{x}_k} = \sum_{k=1}^n |\vec{x}_k\rangle \langle \vec{x}_k| = \mathbf{E},$$

სადაც  $\mathbf{E}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ერთეულოვანი (იგივეური) ოპერატორია.

**თეორემა 1.** მარტივი სტრუქტურის ნებისმიერი ერმიტული ოპერატორი  $\mathbf{H}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  გამოისახება მისი საკუთარი რიცხვებით  $h_k$  და საკუთარი ვექტორებით  $|\vec{\eta}_k\rangle$  შემდეგნაირად:

$$(31) \quad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^n h_k |\vec{\eta}_k\rangle \langle \vec{\eta}_k|. \quad (\langle \vec{\eta}_k | \vec{\eta}_k \rangle = 1, \quad k = \overline{1, n})$$

**დამტკიცება.** ვინაიდან ერმიტული ოპერატორის საკუთარი ვექტორები  $|\vec{n}_k\rangle$ ,  $k=\overline{1,n}$ , შეადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში, ნებისმიერი  $|\vec{x}\rangle \in \mathbb{U}^n$  ვექტორისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(30') \quad |\vec{x}\rangle = \sum_{k=1}^n |\vec{n}_k\rangle \langle \vec{n}_k | \vec{x} \rangle.$$

ვინაიდან  $|\vec{n}_k\rangle$  არის  $\mathbf{H}:\mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის  $h_k$  საკუთარი რიცხვის შესაბამისი საკუთარი ვექტორი, (30') გაშლის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\mathbf{H}|\vec{x}\rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{H}|\vec{n}_k\rangle \langle \vec{n}_k | \vec{x} \rangle = \sum_{k=1}^n h_k |\vec{n}_k\rangle \langle \vec{n}_k | \vec{x} \rangle. \quad \blacksquare$$

**შენიშვნა.** (31) და (4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მარტივი სტრუქტურის ერმიტული ოპერატორის მატრიცას ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში აქვს შემდეგი სახე:

$$(31') \quad H_{lm} = \sum_{k=1}^n h_k \langle \vec{e}_l | \vec{n}_k \rangle \langle \vec{n}_k | \vec{e}_m \rangle = \sum_{k=1}^n h_k (\vec{n}_k)_l (\vec{n}_k)_m^*.$$

განვიხილოთ მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორი მის კანონიკურ ბაზისში – ამ ოპერატორის კანონიკური მატრიცა. სრული ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს მოცემული ოპერატორი, განსაზღვრავს მისი კანონიკური ბაზისის ორიენტაციას  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში არჩეული ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ და ამ ოპერატორის საკუთარი რიცხვების მნიშვნელობებს. თუ ბაზისის არჩევა  $\mathbb{U}^n$  სივრცეში შეიძლება ნებისმიერად, ოპერატორის კანონიკური ბაზისის ორიენტაციას ვერ დავაფიქსირებთ. მაშასადამე, ამ ოპერატორში მოცემული “ობიექტური” ინფორმაციის მაქსიმალური მოცულობა მთლიანად განისაზღვრება  $n$  ნამდვილი პარამეტრით, რომლებიც ურთიერთ ცალსახად განსაზღვრავს ოპერატორის საკუთარ რიცხვებს.

ეს სიტუაცია ანალოგიურია ფარდობითობის პრინციპისა: ერთგვაროვან იზოტროპულ სივრცეში არ არსებობს გამოყოფილი ათვლის სისტემა და ამიტომ ვერაფერს ვიტყვით ჩვენს საკუთარ ლაბორატორიასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მოძრაობის სიჩქარეზე; ბუნებრივია, ეს ათვლის სისტემა ჩავთვალოთ უძრავად, უფრო ზუსტად – აღვწეროთ მოვლენები ჩვენი საკუთარი ათვლის სისტემის მიმართ. ამით სავსებით განისაზღვრება ამ მოვლენების ხასიათი ნებისმიერი სხვა ათვლის სისტემის მიმართაც – საკმარისია შესაბამისი გარდაქმნის კანონების გამოყენებით ახალ ათვლის სისტემაში გადასვლა.

ერმიტული ოპერატორის დამახასიათებელ პარამეტრებად საკუთარი რიცხვების არჩევა, როგორც წესი, მოუხერხებელია: თუ ოპერატორი თავიდანვე არ არის მოცემული მისი საკუთარი მატრიცით, საკუთარი რიცხვების მოსაძებნად საჭიროა ამოიხსნას ოპერატორის მახასიათებელი განტოლება –  $n$  ხარისხის ალგებრული განტოლება, რაც, საზოგადოდ, შესაძლებელია მხოლოდ მიახლოებით, რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. ზოგად შემთხვევაში ანალიზური ამონახსნის პოვნის შეუძლებლობა  $n \geq 5$  განზომილებებისათვის წარმოშობს გარკვეულ, ზოგჯერ კი პრინციპულ სირთულეებს, როგორც ჩვენს ამოცანაში ოპერატორთა უნიტარული კლასიფიცირების შესახებ, ასევე გამოყენებითი ხასიათის სხვა ამოცანებში.

ამრიგად, გვესაჭიროება ისეთი პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრავს ერმიტული ოპერატორის ყველა დამოუკიდებელ (ნამდვილ) საკუთარ რიცხვს და, ამასთან, უნიტარულად ინვარიანტულია და არ მოითხოვს მათ მოსაძებნად რომელიმე სპეციალურ ბაზისში გადასვლას. ცხადია, მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვები – კანონიკური მატრიცის დიაგონალური ელემენტები – შეიძლება იყოს ნებისმიერი. ამასთან, 2.1 თეორემის თანახმად, მარტივი სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვები ცალსახად განსაზღვრავს ამ ოპერატორის ორბიტას (უნიტარული ჯგუფის მიმართ). ამიტომ მართებულია

**თეორემა 2.** მარტივი სპექტრის მქონე ერთი ერმიტული ოპერატორის პოლინომურად დამოუკიდებელი უნიტარული ინვარიანტების რაოდენობა ტოლია სივრცის განზომილებისა.

**დამტკიცება.** 2.5 წინადადების თანახმად,  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტები უნიტარულად ინვარიანტული სიდიდეებია, ამასთან, მათი რაოდენობა მრავალწევრის  $n$  ხარისხს ემთხვევა. ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$(32) \quad \det[P - \lambda E]_1^n = \sum_{k=0}^n (-\lambda)^{n-k} p_k,$$

სადაც მრავალწევრის კოეფიციენტები  $p_k$  წარმოადგენს ოპერატორის  $P = [P_{ik}]$  მატრიცის  $k$  რიგის მთავარი მინორების ჯამებს (აღნიშვნები ისეთივეა, როგორც მონოგრაფიაში [42]):

$$(33) \quad p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}. \quad (k = \overline{1, n})$$

ვიეტის თეორემის თანახმად, ყველა ეს კოეფიციენტი არის მახასიათებელი განტოლების ფესვების  $-\mathbf{P}$  ოპერატორის საკუთარი რიცხვების  $-\text{ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები}$  (იხ., მაგ., [59], გვ. 242-246):

$$(34) \quad p_k = \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}.$$

კერძოდ,  $p_1 = \text{tr} P = \sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ ,  $p_n = \sigma_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det P = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ .

აღვილად ვაჩვენებთ [96], რომ მრავალწევრები (34) ერთმანეთისგან ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია და, მაშასადამე, პოლინომურად დამოუკიდებელია. ■

**შედეგი 1.** ცხადია, რომ მარტივი სპექტრის მქონე ოპერატორის ნებისმიერი უნიტარული ინვარიანტი გამოისახება მისი საკუთარი რიცხვების სიმეტრიული მრავალწევრით. ვინაიდან ნებისმიერი სიმეტრიული მრავალწევრი გამოისახება (ცალსახად), როგორც ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების პოლინომი (კოეფიციენტებით იმავე რიცხვითი ველიდან, რომელსაც ეკუთვნის მოცემული სიმეტრიული მრავალწევრის კოეფიციენტები) (ძირითადი თეორემა სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ (იხ., მაგ., [59], გვ. 243)), ვასკვნიტ, რომ

მარტივი სპექტრის მქონე ერთი ერმიტული ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომის  $n$  კოეფიციენტი შეადგენს ამ ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების პოლინომურ ბაზისს.

ერმიტული ოპერატორის პოლინომიური უნიტარული ინვარიანტის მაგალითს იძლევა ამ ოპერატორის ნატურალური  $k$  ხარისხის კვალი (ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში), რომელსაც აღვნიშნავთ, როგორც შრომაში [41],

$$(35) \quad t_k(P) = \text{tr} P^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k. \quad (k \in \mathbb{N})$$

(35) ინვარიანტის წარმოდგენას (34) ბაზისში იძლევა ნიუტონის ფორმულები ([59], გვ. 245):

$$(36) \quad t_k(P) = \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l-1} t_{k-l}(P) \sigma_l + (-1)^{k-1} k \sigma_k, \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$t_k(P) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} t_{k-l}(P) \sigma_l. \quad (k > n)$$

პარაგრაფის დასასრულს ჩამოვაცალიბოთ *ჰამილტონ-კელის* ფუნდამენტური თეორემა, რომელიც მნიშვნელოვანია შემდგომისათვის (დამტკიცება იხ., მაგ., [42], გვ. 92-93):

**თეორემა 3** (*ჰამილტონი, კელი*). ნებისმიერი მატრიცა  $P \in M_n(\mathbb{C})$  (ოპერატორი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ ) აკმაყოფილებს საკუთარ მახასიათებელ (32) განტოლებას:

$$(37) \quad \sum_{l=0}^n (-P)^{n-l} p_l = 0.$$

აქ  $(P)^0 = E_n \in M_n(\mathbb{C})$  ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეში დგას ნულოვანი  $n \times n$  მატრიცა. შევნიშნოთ, რომ (37) მატრიცული იგივეობის ორივე მხარის კვალის გამოთვლა გვაძლევს (36) ფორმულას  $k=n$  შემთხვევისათვის.



### §2.3. გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის ინვარიანტები

ვთქვათ, ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის  $p_j$  საკუთარი რიცხვის ჯერადობა  $r_j \geq 1$ , ე.ი. ოპერატორის საკუთარი რიცხვები შეადგენს მულტისიმრავლეს (იხ., მაგ., [99], §3.4)

$$(38) \quad \mathcal{P} = \{p_j^{r_j} \mid r_j \geq 1, j = \overline{1, m}\}, \quad p_j \neq p_k, \text{ როცა } j \neq k.$$

აქ  $r_j \in \mathbb{N}$ ,  $p_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , ამასთან

$$(39) \quad \sum_{j=1}^m r_j = n.$$

მაშინ (33) უნიტარულ ინვარიანტთა შორის შეიძლება არსებობდეს პოლინომიური დამოკიდებულებები. ნაშრომში [41] გადაწყვეტილია ამოცანა ასეთი ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალური პოლინომიური ბაზისის აგების შესახებ და ნაჩვენებია, რომ ორი ასეთი ოპერატორი უნიტარულად მსგავსია (მათი მატრიცები ეკუთვნის ერთ ორბიტას) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ინვარიანტების მინიმალური პოლინომიური ბაზისები ერთნაირია.

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად ინვარიანტების (33) ბაზისის ნაცვლად უფრო მოსახერხებელია (35) ბაზისის გამოყენება, რომელიც ცალსახად დაკავშირებულია (33) ბაზისთან ნიუტონის ფორმულებით (36).

(38) სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორისათვის გვექნება:

$$(40) \quad t_k(P) = \operatorname{tr} P^k = \sum_{j=1}^m r_j p_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

შემოვიღოთ [41] ე.წ. *პანკელის მატრიცები* (იხ., მაგ., [42], გვ. 301):

$$(41) \quad T_k(P) = [t_{i+j-2}(P)]_{1 \leq i, j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$$

და აღვნიშნოთ

$$(42) \quad D_k(P) = \det T_k(P), \quad k \in \mathbb{N}.$$

ცხადია,  $D_1(P) = t_0(P) = n$ .

ვინაიდან  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ერმიტული ოპერატორის ყველა საკუთარი რიცხვი ნამდვილია,  $k$ -ს საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის  $T_k(P) = [t_{i+j-2}(P)]_1^k$  მატრიცის რანგი ტოლია  $\mathbf{P}$  ოპერატორის ერთმანეთისგან განსხვავებული საკუთარი რიცხვების  $m$  რაოდენობისა (და  $T_k(P)$  მატრიცის სიზნატურისა (იხ., მაგ., [42], გვ. 494)):

$$(43) \quad \operatorname{rank} T_k(P) = m, \quad k \geq m.$$

ნაშრომში [41] დამტკიცებულია შემდეგი

**წინადადება 18.** (42) დეტერმინანტები გამოითვლება ფორმულით

$$(44) \quad D_k(P) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \left\{ r_{i_1} \dots r_{i_k} \prod_{1 \leq j < l \leq k} (p_{i_j} - p_{i_l})^2 \right\} > 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

**დამტკიცება.** (40)-(42) ფორმულების გათვალისწინებით, გვაქვს

$$(45) \quad D_k(P) = \det AB = \det \left[ \sum_{j=1}^m a_{ij}(P) b_{jl}(P) \right]_1^k,$$

სადაც აღვნიშნეთ

$$A = [a_{ij}(P)] = [r_j p_j^{i-1}] \in M_{k,m}(\mathbb{R}), \quad B = [b_{jl}(P)] = [p_j^{i-1}] \in M_{m,k}(\mathbb{R}). \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq i, l \leq k)$$

ბინე-კოშის ფორმულის (იხ., მაგ., [42], გვ. 20) გამოყენებით, (45) ფორმულიდან ვღებულობთ დასამტკიცებელ (44) გამოსახულებას. ■

**შედეგი 2.** ხარისხოვანი ჯამები (ნიუტონის ჯამები)  $t_k(P) = \sum_{j=1}^m r_j p_j^k$  რომელთა ხარისხის მახვენებელი  $k \geq 2m$ , რაციონალურად გამოისახება ჯამებით  $t_0(P), \dots, t_{2m-1}(P)$ .

**დამტკიცება.** (43) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$D \begin{pmatrix} 1, & \dots, & m, & m+1 \\ 1, & \dots, & m, & m+k \end{pmatrix} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$D_m(P) > 0$  მინორის ყველა მთავარი მინორისათვის. აქედან ვპოულობთ (იხ. [59], გვ. 32):

$$(46) \quad t_{2m+k-1}(P) D_m(P) = \sum_{l,j=1}^m t_{m+k+j-2}(P) t_{m+l-1}(P) A \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} (P), \quad k \in \mathbb{N},$$

სადაც  $A \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} (P)$  არის  $t_{l+j-2}(P)$  ელემენტის ალგებრული დამატება  $D_m(P)$  დეტერმინანტში. ცხადია,  $A \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} (P)$  დამოკიდებულია მხოლოდ  $t_0(P), \dots, t_{2m-2}(P)$  ჯამებზე. (46) თანაფარდობიდან ვხედავთ, რომ როცა  $k=1$ , ჩამოყალიბებული დებულება მართებულია:

$$t_{2m}(P) = [D_m(P)]^{-1} \sum_{l,j=1}^m t_{m+j-1}(P) t_{m+l-1}(P) A \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} (P).$$

აქედან და (46)-დან  $k$ -ს მიხედვით ინდუქციით მივიღებთ 2.2 შედეგს. ■

წინადადება 18 და შედეგი 2.2 საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ ამ პარაგრაფის ძირითადი თეორემა [41]:

**თეორემა 4.** ასახვა

$$(47) \quad \{t_k(P) \mid k = \overline{0, 2m-1}\} \mapsto \{p_i^{r_i} \mid i = \overline{1, m}\}$$

არის ბიექტორი (ურთიერთ ცალსახა).

**დამტკიცება.** ასახვის ინიექტივობა გამომდინარეობს განმარტებიდან (40), რომლის თანახმად (47) ასახვის მარცხენა მხარე ცალსახად გამოისახება მარჯვენა მხარეში მდგარი სიდიდეების დიფერენცირებადი ფუნქციებით. მაშასადამე თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ (47) ასახვის სურიექტივობა.

ვისარგებლოთ ოპერატორული იგივეობით

$$(48) \quad \prod_{k=1}^m (\mathbf{P} - p_k \mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

(38) სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორისათვის (ეს იგივეობა ადვილად მოწმდება ოპერატორის საკუთარ ბაზისში), რომელიც გადავწეროთ ტოლფასი სახით:

$$(49) \quad \mathbf{P}^m - \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{P}^{m-k} = \mathbf{0}.$$

კოეფიციენტები  $c_k$  (49) იგივეობაში დაკავშირებულია ოპერატორის საკუთარ (ნამდვილ)  $p_k$  რიცხვებთან ( $p_k \neq p_l$  როცა  $k \neq l$ ) ფორმულებით

$$(50) \quad c_k = (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq m} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{k-1}}, \quad k = \overline{1, m},$$

და განსაზღვრავს ამ რიცხვებს, როგორც  $z^m - \sum_{k=1}^m c_k z^{m-k} = 0$  განტოლების ფესვებს.

თავის მხრივ,  $c_k$  კოეფიციენტები მოიძებნება (49) ფორმულებიდან შემდეგი ხერხით [41]: გავამრავლოთ (49) იგივეობები თანმიმდევრულად  $\mathbf{P}$  ოპერატორის ხარისხებზე და გამოვიტვალოთ მიღებული იგივეობების ორივე მხარის კვალი. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$(51) \quad \sum_{k=1}^m c_k t_{m-k+i}(P) = t_{m+i}(P), \quad i = \overline{0, m-1},$$

რომლის დეტერმინანტი, (41)-(43) გათვალისწინებით, არის  $(-1)^{m(m-1)/2} D_m(P) \neq 0$ . აქედან  $c_k$  რიცხვები განისაზღვრება, როგორც  $t_0(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  სიდიდეების რაციონალური ფუნქციები.

$p_k$  რიცხვების (40) ფორმულებში შეტანით მივიღებთ  $m$  წრფივ განტოლებათა სისტემას  $r_1, \dots, r_m$  უცნობებისათვის, დეტერმინანტით  $\det[p_i^{k-1}]_1^m = \prod_{1 \leq k < j \leq m} (p_j - p_k) \neq 0$ . ■

**შენიშვნა.** (47) ასახვის იაკობიანი დაიყვანება ვადერმონდის 2-ჯერად მატრიცაზე:

$$(52) \quad J = \frac{\partial(t_0, t_1, \dots, t_{2m-1})}{\partial(p_1, r_1, \dots, p_m, r_m)} = \left( \prod_{i=1}^m r_i \right) \det V(p_1, \dots, p_m; 2) = \\ = m! \left( \prod_{i=1}^m r_i \right) \prod_{1 \leq k < j \leq m} (p_j - p_k)^2 \neq 0.$$

ასეთი მატრიცები შემოღებულია შრომაში [44] და განხილულია დისერტაციის III თავში.

თეორემა 2.4 გვაძლევს ერმიტული  $\mathbf{P}$  და  $\mathbf{Q}$  ოპერატორების უნიტარული მსგავსებისათვის საკმარის პირობებს:

$$(53) \quad t_0(P) = t_0(Q), \dots, t_{2m-1}(P) = t_{2m-1}(Q),$$

რომელთა რაოდენობა განისაზღვრება ამ ოპერატორების სხვადასხვა საკუთარი რიცხვების რაოდენობით  $m$ .

შრომაში [41] ნაჩვენებია, რომ (53) პირობათა შორის ყველა არ არის დამოუკიდებელი. კერძოდ, დამოუკიდებელი პირობების რაოდენობა შემცირდება, თუ ზოგიერთ (სხვადასხვა) საკუთარ რიცხვს აქვს ერთნაირი ჯერადობა.

აღნიშნოთ, როგორც შრომაში [41],  $p_{ij}, j = \overline{1, s_i}$ , ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ის (სხვადასხვა) საკუთარი რიცხვები, რომლებსაც აქვს ჯერადობა (ერთნაირი)  $r_{ij} = q_i, i = \overline{1, l}$ . ამ აღნიშვნებში  $\mathcal{P} = \{p_j^{r_j} \mid j = \overline{1, m}\}$  მულტისიმრავლის პირველი სპეციფიკაცია (იხ., მაგ., [54]) თვითონ შეადგენს მულტისიმრავლეს:

$$(54) \quad \mathcal{R} = \{r_{ij} \mid j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1, l}\} = \{q_i^{s_i} \mid i = \overline{1, l}\}, \quad q_i \neq q_k, \text{ როცა } i \neq k,$$

ამასთან,

$$(55) \quad \sum_{i=1}^l q_i s_i = n, \quad \sum_{i=1}^l s_i = m. \quad (q_i, s_i \in \mathbb{N}, l \geq 1)$$

ზოგადობის დაურღვევლად, (38) მულტისიმრავლე შეგვიძლია მოვაწესრიგოთ ისე, რომ

$$(56) \quad p_{ij} < p_{i, j+1}, \quad j = \overline{1, s_i}; \quad q_i < q_{i+1}, \quad i = \overline{1, l-1}.$$

2.4 თეორემის თანახმად, (54) მულტისიმრავლის ელემენტებზე დადებული  $m-l$  პირობა

$$(57) \quad r_{11} = \dots = r_{1s_1} = q_1, \dots, r_{l1} = \dots = r_{ls_l} = q_l$$

გადაისახება  $t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  უნიტარულ ინვარიანტებზე დადებულ  $m-l$  დამოუკიდებელ პირობაში. ამიტომ  $2m-1$  უნიტარულ ინვარიანტებს  $t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  შორის არის არაუმეტეს  $\mathbf{n}(P) = m+l-1$  დამოუკიდებელი.

**შენიშვნა.** დაყოფათა თეორიის ტერმინოლოგიით, (55) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ მოწესრიგებული მულტისიმრავლე (54) წარმოადგენს  $n$  ნატურალური რიცხვის –  $\mathbb{U}^n$  სივრცის განზომილების – დაყოფას, ამასთან ამ დაყოფის რანგი არის  $m$ . [99] მონოგრაფიის აღნიშვნებში გვაქვს:

$$(q_1^{s_1}, \dots, q_l^{s_l}) \vdash n, \quad (s_1, \dots, s_l) \vdash m.$$

დანაწევრებათა თეორიაში ცნობილი რამზის თეორემის თანახმად (დამტკიცება იხ., მაგ., [53], გვ. 77-81),  $\mathbf{n}(P) = m+l-1 \in \mathbb{N}$  არის ის მინიმალური (ნაშრომში [41] დაშვებულია კორექტურის შეცდომა და დაბეჭდილია “მაქსიმალური”) ნატურალური რიცხვი, რომლის ნებისმიერი დაყოფა  $l$  ნაწილად

$$(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_l) \vdash \mathbf{n}(P)$$

შეიცავს ისეთ ერთ ნაწილს მაინც, რომლისთვისაც

$$\mathbf{n}_i \leq s_i, \quad 1 \leq i \leq l.$$

**წინადადება 19.**  $\mathbf{n}(P)$  რიცხვისთვის მართებულია [41] შეფასება

$$(58) \quad \mathbf{n}(P) = l + \sum_{i=1}^l s_i - 1 \leq n,$$

ამასთან, ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როდესაც

a)  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის სპექტრი მარტივია:

$$l = 1; \quad q_1 = 1, \quad s_1 = n; \quad (1^n) \vdash n,$$

b)  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ერთი საკუთარი რიცხვის ჯერადობაა 2, ხოლო დანარჩენი საკუთარი რიცხვები მარტივია:

$$l = 2; \quad q_1 = 1, \quad s_1 = n - 2; \quad q_2 = 2, \quad s_2 = 1; \quad (1^{n-2}, 2) \vdash n.$$

**დამტკიცება.** (55) ფორმულებიდან გვაქვს

$$n = \sum_{i=1}^l (q_i - 1)(s_i - 1) + \sum_{i=1}^l s_i + \sum_{i=1}^l (q_i - 1) = \sum_{i=1}^l (q_i - 1)(s_i - 1) + \sum_{i=1}^l s_i + \sum_{i=1}^l (q_i - i) + l(l-1)/2.$$

(56) პირობებიდან გამომდინარე  $s_i \geq 1$ ,  $q_i \geq i$  უტოლობების გათვალისწინებით, ვპოულობთ:

$$n \geq \sum_{i=1}^l s_i + l(l-1)/2,$$

სადაც ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ მაშინ, როცა  $q_i = i$ ,  $i = \overline{1, l}$  და  $s_2 = \dots = s_l = 1$ . ვინაიდან  $l(l-1)/2 \geq l-1$  და აქ ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ მაშინ, როცა  $l=1, 2$ , ვღებულობთ (58). ■

ნაშრომში [41] განხილულია 2.19 წინადადების საილუსტრაციო რამდენიმე საინტერესო მაგალითი:

1. ვთქვათ,  $\mathbf{P}$  ოპერატორს აქვს  $s_1$  მარტივი საკუთარი რიცხვი, ე.ი. მის სპექტრს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathcal{P} = \{p_{1j}, p_i^{q_i} \mid j = \overline{1, s_1}, i = \overline{2, l}\}.$$

მაშინ (55) და (56) გვაძლევს

$$n = s_1 + \sum_{j=2}^l s_j q_j \geq s_1 + \sum_{j=2}^l q_j \geq s_1 + \sum_{j=2}^l j = s_1 + l(l+1)/2 - 1, \quad (n \geq s_1, l \geq 1)$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} l(l+1)/2 - n + s_1 - 1 &\leq 0, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 - \sqrt{9+8(n-s_1)} &< 2 \leq 2l \leq -1 + \sqrt{9+8(n-s_1)} \end{aligned}$$

და ვპოულობთ:

$$\mathbf{n}(P) = l + s_1 + \sum_{i=2}^l s_i - 1 \geq 2l + s_1 - 2 \Rightarrow s_1 \leq \mathbf{n}(P) \leq \sqrt{9+8(n-s_1)} + s_1 - 3.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში  $\mathbf{n}(P)$  განისაზღვრება მარტივი ფესვების  $s_1$  რაოდენობით.

შევნიშნოთ, რომ მარტივი სპექტრის მქონე ოპერატორისათვის  $\mathbf{n}(P) = n = s_1$ .

2. ვთქვათ,  $\mathbf{P}$  ოპერატორის სპექტრი შემდეგი სახისაა:  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2^{n-1}\}$ . მაშინ

$$l = 2; \quad q_1 = 1, \quad s_1 = 1, \quad q_2 = n - 1, \quad s_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{n}(P) = 3.$$

3. ვთქვათ,  $\mathcal{P} = \{p_1^n\}$ . მაშინ  $l = 1; \quad q_1 = n, \quad s_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{n}(P) = 1$ .

ვაჩვენოთ, როგორც ნაშრომში [41], რომ მართებულია

**თეორემა 5.** ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების სიმრავლის

$$(59) \quad \mathcal{I}(P) = \left\{ t_k(P) \mid k = \overline{1, \mathbf{n}(P)}, \mathbf{n}(P) = l + \sum_{i=1}^l s_i - 1 \right\}$$

ელემენტები, როგორც დამოუკიდებელი (56) ცვლადების ფუნქციები, ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია.

**დამტკიცება.** შემოვიღოთ აღნიშვნები (იხ. [41])

$$\phi_{ij} = r_{i,j+1} - r_{i1}, \quad j = \overline{1, s_i - 1}, \quad i = \overline{1, l},$$

სადაც  $r_{ij}$  არის  $p_{ij}$  საკუთარი რიცხვის ჯერადობა,  $j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1, l}$ . ნაშრომში [41] შემოღებულია ფუნქციების პირობითი ფუნქციონალური დამოუკიდებლობის ცნება და ნაპოვნია შესაბამისი კრიტერიუმი (იხ. თავი III, §5). თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციები  $\{t_k(P) | k = \overline{1, n(P)}\}$  პირობითად ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია შემდეგი სახის პირობებში:

$$(60) \quad \phi_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, s_i - 1}, \quad i = \overline{1, l}, \quad t_0(P) = \sum_{i=1}^l q_i s_i = n.$$

სათანადო თეორემის (იხ. გვ. 38) პირობის შესაბამისად, გამოვითვალოთ იაკობიანი

$$\tilde{J} = \frac{\partial(t_0, t_1, \dots, t_{n(P)}, \phi_{11}, \dots, \phi_{l s_l})}{\partial(p_{11}, r_{11}, \dots, p_{l s_l}, r_{l s_l})}.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, (41) ფორმულების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$(61) \quad \tilde{J} = \left( \prod_{i=1}^l q_i^{s_i} \right) \det[\tilde{u}_1 | \dots | \tilde{u}_l],$$

სადაც

$$\tilde{u}_i = [u_{kj}^{(i)}]_{\substack{0 \leq k \leq n(P) \\ 1 \leq j \leq s_i}} = \left[ \sum_{j=1}^{s_i} p_{ij}^k, (p_{i1}^k)', \dots, (p_{i s_i}^k)' \right]_{0 \leq k \leq n(P)}, \quad i = \overline{1, l}.$$

$$\text{აქ } (p_{ij}^k)' = k p_{ij}^{k-1} = (\partial / \partial p_{ij}) p_{ij}^k.$$

ინდუქციით  $l$  ინდექსის მიხედვით ადვილად ვაჩვენებთ (იხ. [41]), რომ დეტერმინანტი (61) ფორმულის მარჯვენა მხარეში არის  $p_{11}$  ცვლადის პოლინომი, რომლის ხარისხია

$$2n(P) - 4 = 2 \left( l + \sum_{i=1}^l s_i - 1 \right) - 4 \geq 4l - 6 \geq 2$$

და უფროსი წევრის კოეფიციენტი არ არის იგიურად ნულის ტოლი. მაშასადამე,  $\tilde{J} \neq 0$ . აქედან, 3.4 თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს (59) სიმრავლის ელემენტების ფუნქციონალურად დამოუკიდებლობა.  $\blacksquare$

ინვარიანტები  $t_0(P), t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$ , თანახმად 2.4 თეორემისა, სრულად განსაზღვრავს  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის სპექტრს – მისი საკუთარი რიცხვების (38) მულტისიმრავლეს, რომელიც, თავის მხრივ, განსაზღვრავს  $\mathbf{P}$  ოპერატორის ნებისმიერ უნიტარულ ინვარიანტს.

2.2 შედეგის თანახმად,  $t_0(P), t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  განსაზღვრავს  $\text{tr} \mathbf{P}^k = t_k(P)$  ინვარიანტებს ნებისმიერი ნატურალური მაჩვენებლისათვის  $k \geq 2m$  და, (36) ნიუტონის ფორმულების გამოყენებით, ყველა ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრს  $\sigma_k(p_1, \dots, p_n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . ამრიგად, სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ ძირითადი თეორემის გათვალისწინებით, გვაქვს

**შედეგი 3.** გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ყველა რაციონალური ინვარიანტი გამოისახება, როგორც  $t_0(P), t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  ინვარიანტების ნამდვილი რაციონალური ფუნქცია.

**შენიშვნა.** თუ  $2m-1 \geq n$ , ჰამილტონ-კელის 2.3 თეორემის და ნიუტონის (36) ფორმულების გამოყენებით  $k \geq n$  ხარისხის მქონე ინვარიანტები სიმრავლეში  $\{t_k(P) | k = \overline{0, 2m-1}\}$  პოლინომურად გამოისახება უფრო დაბალი ხარისხის მქონე ინვარიანტებით. ამრიგად,

გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური ბაზისი შეიცავს  $N$  ელემენტს,  $n(P) \leq N \leq n$ .

შრომაში [41] ნაპოვნია თანაფარდობები  $\{t_k(P) | k=0, \overline{2m-1}\}$  სიმრავლის ელემენტთა შორის, რომლებშიც გადაისახება (57) ბმები.

შემოვიღოთ დიაგონალური მატრიცა

$$(62) \quad R = \text{diag}\{r_1^{-1}, \dots, r_m^{-1}\}$$

(ეს განმარტება კორექტულია, ვინაიდან ყველა  $r_i \geq 1, i=\overline{1, m}$ ) და შევისწავლოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$(63) \quad t_k(R) = \text{tr} R^k, \quad T_k(R) = [t_{i+j-2}(R)]_1^k, \quad D_k(R) = \det T_k(R), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (t_0(R) = m)$$

მართებულია (იხ. [41]) შემდეგი

**თეორემა 6. ასახვა**

$$(64) \quad \{t_k(P) | k=0, \overline{2m-1}\} \mapsto \{t_k(R) | k \in \mathbb{N}\}$$

არის ინიექტური და ყველა  $t_k(R) = \text{tr} R^k, k \in \mathbb{N}$ , რაციონალურად გამოისახება არგუმენტებით  $t_0(P), t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$ .

**დამტკიცება.** გამოსახულებების შემოკლებისათვის აღვნიშნოთ, როგორც შრომაში [41]:

$$t_k = \text{tr} P^k, \quad T_k = T_k(P), \quad \tilde{t}_k = \text{tr} R^k, \quad \tilde{T}_k = T_k(R), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(40) ტოლობების პირველი  $m$  განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$(65) \quad r_i = \frac{\det R^{(i)}}{\det [p_i^{k-1}]_1^m}, \quad i = \overline{1, m},$$

სადაც  $R^{(i)} = [R_{kl}^{(i)}] \in M_m(\mathbb{R})$  მატრიცის  $k$ -ური სტრიქონი შემდეგი სახისაა:

$$[p_1^{k-1}, \dots, p_i^{k-1}, t_{k-1}, p_i^{k-1}, \dots, p_m^{k-1}], \quad k = \overline{1, m}.$$

(65) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$r_i^2 = \frac{\det [r_l R_{kl}^{(i)}] \det [R_{kl}^{(i)}]}{\det [r_j p_j^{k-1}] \det [p_j^{k-1}]}, \quad i = \overline{1, m},$$

შევკვეცოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე  $r_i \neq 0$  სიდიდეზე და გადავამრავლოთ მარჯვენა მხარეში მდგარი დეტერმინანტები “სტრიქონი სტრიქონზე” წესის შესაბამისად. მივიღებთ:

$$(66) \quad r_i = \frac{\det [t_{k+j-2} + t_{k-1} t_{j-1} - r_i p_i^{k+j-2}]_1^m}{\det [t_{k+j-2}]_1^m}, \quad i = \overline{1, m}.$$

ამ გამოსახულების გასამარტივებლად შემოვიღოთ (იხ. [41]) ერთსვეტიანი მატრიცები

$$\mathbf{0} = [0] \in M_{m,1}, \quad \mathbf{t} = [t_{k-1}]_{k=\overline{1, m}} \in M_{m,1}, \quad \mathbf{p}_i = [p_i^{k-1}]_{k=\overline{1, m}} \in M_{m,1}, \quad (i = \overline{1, m})$$

და ვისარგებლოთ შემდეგი იგივეობით  $(m+2) \times (m+2)$  ზომის უჯრედოვანი მატრიცებისათვის:

$$\begin{bmatrix} T_m & \mathbf{t} & -r_i \mathbf{p}_i \\ -\mathbf{t}^T & +1 & 0 \\ -\mathbf{p}_i^T & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^T & +1 & 0 \\ \mathbf{p}_i^T & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_m + \mathbf{t} \mathbf{t}^T - r_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T & \mathbf{t} & -r_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^T & +1 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

(აქ  $E_m \in M_m$  ერთეულოვანი მატრიცაა;  $T$  აღნიშნავს ტრანსპონირებას), რომელიც გვაძლევს:

$$\det [T_m + \mathbf{t} \mathbf{t}^T - r_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T] = \det \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{t} & -r_i \mathbf{p}_i \\ -\mathbf{t}^T & +1 & 0 \\ -\mathbf{p}_i^T & 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

მივუმატოთ უკანასკნელი მატრიცის  $(m+1)$ -ე სტრიქონს პირველი სტრიქონი და შემდეგ

გამოვაკლოთ  $(m+1)$ -ე სვეტს პირველი სვეტი. ვინაიდან  $T_m = [t_{i+j-2}]_1^m$  მატრიცის პირველ სტრიქონში დგას  $\mathbf{t}^T = [t_{k-1}]^T$ , ხოლო პირველ სვეტში –  $\mathbf{t} = [t_{k-1}]$ , მივიღებთ

$$\det [T_m + \mathbf{t}\mathbf{t}^T - r_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T] = \det \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{0} & -r_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^T & 1+t_0 & -r_i \\ -\mathbf{p}_i^T & +1 & +1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{0} & -r_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^T & 1+t_0 & -(1+t_0+r_i) \\ -\mathbf{p}_i^T & +1 & 0 \end{bmatrix}.$$

მარჯვენა მხარეს მდგარი დეტერმინანტის გაშლა  $(m+1)$ -ე სტრიქონის ელემენტების მიხედვით მოგვცემს თანაფარდობას

$$\det [T_m + \mathbf{t}\mathbf{t}^T - r_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T] = r_i(1+t_0) \det \begin{bmatrix} T_m & -\mathbf{p}_i \\ -\mathbf{p}_i^T & 0 \end{bmatrix} + (1+t_0+r_i) D_m. \quad (i = \overline{1, m})$$

ამ შედეგის შეტანა (66) მარჯვენა მხარეში და გამარტივება გვაძლევს

$$(67) \quad r_i \det \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{p}_i \\ -\mathbf{p}_i^T & 0 \end{bmatrix} = D_m, \quad i = \overline{1, m}.$$

როგორც ვხედავთ, დეტერმინანტი ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში წარმოადგენს  $T_m$  მატრიცის მთარშიებულ მინორს. ამიტომ (იხ., მაგ., [59], გვ. 32) ვღებულობთ

$$(68) \quad r_i^{-1} = D_m^{-1} \det \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{p}_i \\ -\mathbf{p}_i^T & 0 \end{bmatrix} = D_m^{-1} \sum_{1 \leq j, l \leq m} A \binom{l}{j} (P) p_i^{j+l-2}. \quad (i = \overline{1, m})$$

აქედან ვპოულობთ

$$(69) \quad r_i^{-k} = D_m^{-k} \sum_{j=1}^{k(2m-1)} \tilde{c}_j(k) p_i^{j-1}, \quad (i = \overline{1, m})$$

სადაც კოეფიციენტები  $\tilde{c}_j(k)$  პოლინომურად გამოისახება  $t_0, \dots, t_{2m-1}$  სიდიდეებით.

(69) ფორმულების აჯამვა  $i$  ინდექსის მიხედვით გვაძლევს

$$(70) \quad \tilde{t}_k = \sum_{i=1}^m r_i^{-k} = D_m^{-k} \sum_{j=1}^{k(2m-1)} \tilde{c}_j(k) \sum_{i=1}^m p_i^{j-1}. \quad (k \in \mathbb{N})$$

აქ შემავალი ხარისხოვანი ჯამები  $\sum_{i=1}^m p_i^{j-1} \equiv S_{j-1}(P)$ ,  $j=1, 2, \dots$ , ნიუტონის (36) ფორმულების გამოყენებით გამოისახება (50) კოეფიციენტებით  $c_k$ :

$$S_k(P) = \sum_{l=1}^{k-1} S_{k-l}(P) c_l + k c_k, \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$S_k(P) = \sum_{l=1}^n S_{k-l}(P) c_l \quad (k > m)$$

და, (51) განტოლებების ძალით, არის  $t_0, t_1, \dots, t_{2m-1}$  სიდიდეების რაციონალური ფუნქციები. ამიტომ (70) ფორმულებით  $\tilde{t}_k$  სიდიდეები,  $k \in \mathbb{N}$ , გამოისახება, როგორც  $t_1, \dots, t_{2m-1}$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციები. ■

**შედეგი 4.18** წინადადების თანახმად, (63) ფორმულებით განმარტებული მატრიცები  $T_k(R)$  აკმაყოფილებენ პირობებს

$$(71) \quad \begin{aligned} D_k(R) &> 0, & k \leq l, \\ \text{rank} T_k(R) &= l, & k \geq l. \end{aligned}$$

ამიტომ, 2.6 თეორემის გათვალისწინებით, ვასკენით, რომ  $2m-1$  უნიტარული ინვარიანტი  $t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  აკმაყოფილებს  $m-l$  დამოუკიდებელ რაციონალურ თანაფარდობას

$$(72) \quad \tilde{D} \begin{pmatrix} 1, & \dots, & l, & l+1 \\ 1, & \dots, & l, & l+k \end{pmatrix} = 0, \quad k = \overline{1, m-l},$$

$D_l(R) \equiv \tilde{D}_l > 0$  მინორის ყველა მთარშიებული მინორისათვის. მაშასადამე,

სიმრავლე  $t_1(P), \dots, t_{2m-1}(P)$  შეიცავს არაუმეტეს  $\mathbf{n}(P) = m+l-1$  დამოუკიდებელ ელემენტს.

**შენიშვნა.** (72) პირობები შეიძლება ჩაეწეროს (46) ანალოგიური ფორმით

$$(73) \quad \tilde{t}_{2l+k-1} \tilde{D}_l = \sum_{i,j=1}^l \tilde{t}_{l+k+i-2} \tilde{t}_{l+j-1} A \binom{i}{j} (R), \quad (k = \overline{1, m-l})$$

რომლებიც, 2.5 თეორემის ძალით, განსაზღვრავს  $t_{\mathbf{n}(P)+1}, \dots, t_{2m-1}(P)$  სიდიდეებს, როგორც (59) სიმრავლის ელემენტების ფუნქციებს. მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

**წინადადება 20.** სიმრავლე (59)

$$\mathcal{S}(P) = \left\{ t_k(P) \mid k = \overline{1, \mathbf{n}(P)}, \mathbf{n}(P) = l + \sum_{i=1}^l s_i - 1 \right\}$$

წარმოადგენს ერმიტული ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალურ ფუნქციონალურ ბაზისს.

დამტკიცებულ დებულებებზე დაყრდნობით შრომაში [41] ჩამოყალიბებულია ერმიტული ოპერატორების უნიტარული მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა:

**თეორემა 7.** ერმიტული ოპერატორები  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  და  $\mathbf{Q}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  უნიტარულად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება  $\mathbf{n} = l + \sum_{i=1}^l s_i - 1$  (ნამდვილი) ტოლობა

$$(74) \quad \mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(Q),$$

სადაც სიმრავლე  $\mathcal{S}(P)$  განმარტებულია (59) ფორმულით.

**დამტკიცება.** (74) პირობების აუცილებლობა ცხადია. საკმარისობა გამომდინარეობს

$$\mathcal{S}(P) \mapsto \left\{ p_{ij}, q_i \mid j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1, l} \right\}$$

ასახვის ინიექტურობიდან, რაც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს წინადადებიდან 20. ■

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ორი მაგალითი.

ა) ერმიტული მარტიცა  $P \in M_n(\mathbb{C})$  პროპორციულია ერთეულოვანი  $E_n \in M_n$  მატრიცისა (ნამდვილი  $p \in \mathbb{R}$  პროპორციულობის კოეფიციენტით) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(75) \quad D_2(P) = t_0 t_2 - t_1^2 = 0 \Leftrightarrow \text{tr} P^2 = (\text{tr} P)^2 / n.$$

ნათელია, რომ მაშინ პროპორციულობის კოეფიციენტი  $p = n^{-1} \text{tr} P \in \mathbb{R}$  და

$$P = n^{-1} (\text{tr} P) E_n \in M_n(\mathbb{R}).$$

ბ) თუ შესრულებულია (75) და, გარდა ამისა,  $\text{tr} P = 0$ , მაშინ (და მხოლოდ მაშინ) ერმიტული მარტიცა  $P \in M_n(\mathbb{C})$  უდრის ნულს.

**შენიშვნა.** თუ ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის  $P$  მატრიცის ელემენტებს (რომელიმე ორთონორმირებულ ბაზისში) ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვები (ბმები), ანუ, თუ  $\{p_{ij}, q_i \mid j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1, l}\}$  სიმრავლის ელემენტები აღარ არის დამოუკიდებელი (მაგ., თუ, როგორც ზემოთ განხილულ მაგალითში,  $\text{tr} P = 0$ ), მაშინ  $\mathbf{P}$  ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების სრული სისტემა შეიცავს  $N < \mathbf{n}(P)$  დამოუკიდებელ ინვარიანტს.

არსებითია, რომ  $l$  რიცხვის ((54) მულტისიმრავლეში ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტების რაოდენობის) მოსაძებნად აუცილებელია  $\{t_k(P) \mid k = \overline{0, 2m-1}\}$  სიმრავლის ყველა ელემენტის ცოდნა. ამასთან, (72) (ან მათი ტოლფასი (73)) თანაფარდობები, რომლებიდანაც მოიძებნება რიცხვი  $l$ , გვაძლევს პოლინომურ კავშირებს ამ სიმრავლის ელემენტებს შორის – ფ. კლაინის ტერმინოლოგიით, ე.წ. *სიზიგებს* (იხ., მაგ., [83], გვ. 145).

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ამ პარაგრაფის დებულებები დარჩება ძალაში, თუ ერმიტულ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს შევცვლით სიმეტრიული  $\mathbf{S}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორით ევკლიდურ  $\mathbb{E}^n$  სივრცეში და უნიტარულ გარდაქმნებს – ორთოგონალური გარდაქმნებით.



## §2.4. არაერმიტული ოპერატორის ინვარიანტები

წინა პარაგრაფებში მიღებული შედეგები თითქმის შეუცვლელად მართებულია ნებისმიერი ნორმალური ოპერატორისათვის. განსხვავება ერმიტულ და ზოგად ნორმალურ ოპერატორებს შორის ძირითადად დაიყვანება მათი საკუთარი რიცხვების განსხვავებაზე: ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვები ნამდვილია, ნორმალური ოპერატორის საკუთარი რიცხვები კი, საზოგადოდ, კომპლექსურია (იხ. ფ-ლა (27)). ამ განსხვავების გამო ორი ნორმალური ოპერატორის უნიტარული მსგავსების კრიტერიუმი (74) ჩაიწერება კომპლექსური ტოლობებით, ე.ი. ნამდვილი პირობების რაოდენობა მატულობს.

განვიხილოთ არაერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორების უნიტარული კლასიფიცირების ამოცანა მათი ინვარიანტების გამოყენებით. ჯერ შევისწავლოთ შემთხვევა, როდესაც ოპერატორი  $\mathbf{P}$  არ არის ნორმალური, ანუ ჩავთვალოთ, რომ მისი ერმიტული კომპონენტები (26) არ კომუტირებს:

$$(76) \quad \mathbf{P}_+ \mathbf{P}_- - \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+ \equiv [\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-] \neq 0.$$

მაშინ, 2.16 წინადადების თანახმად, ერმიტულ  $\mathbf{P}_\pm: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორებს არ გააჩნია საერთო საკუთარი ბაზისი და  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-$  ოპერატორის მატრიცა არც ერთ ორთონორმირებულ ბაზისში არ იქნება დიაგონალური. ასეთი ოპერატორის მატრიცის კანონიკურ ფორმად, ჩვეულებრივ, ირჩევენ ამ მატრიცის ჟორდანის ნორმალურ ფორმას (იხ., მაგ., [42], გვ. 153-155). მაგრამ ჟორდანის ნორმალური ფორმა მატრიცას აქვს ისეთ ბაზისში, რომელიც, საზოგადოდ, არ არის ორთონორმირებული. ამიტომ  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის მატრიცის ჟორდანის ფორმა, საზოგადოდ, არ ეკუთვნის ამ მატრიცის უნიტარულ ორბიტას და არ გამოდგება ოპერატორების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის.

1961 წელს კარლ პირსიმ დაამტკიცა (იხ. [17a]) შემდეგი

**თეორემა 8 (პირსი).** ვთქვათ, გვაქვს ალგებრა  $V$  და  $x, y \in V$  – ამ ალგებრის ნებისმიერი დამოუკიდებელი (საზოგადოდ, არაკომუტირებადი) ცვლადებია. აღვნიშნოთ

$$w(x, y) \equiv x^{\lambda_1} y^{\mu_1} \dots x^{\lambda_k} y^{\mu_k} \in V, \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N}.$$

$$(i, k = 1, 2, \dots)$$

ორი (ზოგადი სახის) ოპერატორი  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ( $\mathbf{P}, \mathbf{Q}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ ) უნიტარულად (ორთოგონალურად) მსგავსია, თუ ყველა მჩვენებლებისათვის  $\lambda_i, \mu_i$ , რომელთა ჯამი  $\leq 2n^2$ , გვაქვს

$$(77) \quad \text{tr} [w(\mathbf{P}, \mathbf{P}^+)] = \text{tr} [w(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+)]. \quad \left( \sum \lambda_i + \mu_i \leq 2n^2 \right)$$

**შენიშვნა.** ნაშრომში [17a] ტერმინი “უნიტარულად მსგავსი”, შეცვლილია ტერმინით “უნიტარულად ექვივალენტური”. გარდა ამისა, პირსის თეორემა დამტკიცებულია ოპერატორებისათვის ჰილბერტის  $n$ -განზომილებიან სავრცეში, რომლის კერძო შემთხვევებია  $\mathbb{U}^n$  და  $\mathbb{E}^n$ . დისერტაციაში განხილულ შემთხვევისგან ეს განსხვავება არ არის არსებითი.

ადვილი საჩვენებელია (იხ. [17a]), რომ (77) პირობები შეიცავს  $2^{2n^2}$  ტოლობას. ამრიგად, პირსის თეორემის თანახმად, კომპლექსური (ნამდვილი)  $n \times n$  მატრიცის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების სრული კრებული შეიცავს არაუმეტეს  $4^{n^2}$  ინვარიანტს.

ცნობილია, რომ ეს შეფასება არაა საუკეთესო. ამას აღნიშნავს თვითონ პირსი ციტირებულ შრომაში [17a]. კერძოდ,  $n=2$  და  $n=3$  შემთხვევებში, ნაცვლად 2.8 თეორემით განსაზღვრული რაოდენობებისა – შესაბამისად  $4^4$  და  $4^9$  – უნიტარული ინვარიანტების სრული კრებულის გაუმჯობესებული შეფასებები მოცემულია სტატიებში [17b], [18], [21a,b] და მონოგრაფიებში [20] (გვ. 102), [23] (გვ. 183-188), [24] (გვ. 207-260). შევნიშნოთ, რომ ეს შეფასებებიც არ არის საბოლოო, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში (მაგ., [19], (გვ. 216)) საკმარისი არ არის ორბიტების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის (ე.ი. არ არის სრული).

შრომაში [40] (იხ. აგრ. [43] და [96]) აგებულია ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ( $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ ) ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების მინიმალური სრული კრებული ნებისმიერი (სასრული) განზომილების უნიტარულ (ეკვილიბრ) სივრცეში. ცხადი სახით ნაპოვნი ანალიზური ფორმულები, რომლებიც აღწერს ამ ოპერატორის პოლინომური ინვარიანტების ბაზისს და დამოუკიდებელ პოლინომურ თანაფარდობებს – სიზიგეებს – ბაზისის შემადგენელ ინვარიანტებს შორის.

$\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალურ სრულ კრებულში ელემენტების რაოდენობის შესაფასებლად შრომაში [40] გამოყენებულია ამ ოპერატორის ერთ-ერთი ერმიტული კომპონენტის (26) საკუთარი (ორთონორმირებული) ბაზისი. ზოგადი სახის ოპერატორის წარმოდგენა (25) ფორმით გამოიყენებოდა აგრეთვე სხვა ავტორების მიერ. ნაშრომში [18] (25) და (28) წარმოდგენების გამოყენებით ცხადი სახით ამოწერილია ინვარიანტების მინიმალური სრული კრებული ოპერატორებისათვის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^3 \rightarrow \mathbb{U}^3$  და  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  (ცხრილების სახით). ამავე წარმოდგენაში ამოწერილია ინვარიანტები  $\mathbb{E}^3$  სივრცეში მონოგრაფიაში [19] (იხ. გვ. 210-221), მაგრამ აქ განხილული ინვარიანტები არ არის საკმარისი ოპერატორების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის (იხ. აგრ. [21a,b]), ე.ი. არაა სრული.

დაეუშვათ,  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის  $\mathbf{P}_+$  ერმიტულ კომპონენტს აქვს მარტივი სპექტრი, ანუ, 2.13 წინადადების შესაბამისად, დაეუშვათ, ამ კომპონენტის კანონიკური ბაზისი  $\mathcal{B}$  (იხ. განმარტება 6) განსაზღვრულია ცალსახად (23) უნიტარული გარდაქმნის სიზუსტით. ამ ბაზისში  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის მატრიცას აქვს დიაგონალური სახე:

$$P_+ = [p_{jk}^{(+)}] = \text{diag}\{p_1^{(+)}, \dots, p_n^{(+)}\},$$

ხოლო  $\mathbf{P}_-$  ოპერატორის მატრიცას, (76) პირობისა და 2.16 წინადადების თანახმად, დიაგონალური სახე არ აქვს. ვისარგებლოთ (23) გარდაქმნით და შევარჩიოთ ნამდვილი რიცხვები (ფაზები)  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  ისე, რომ მაქსიმალურად გამარტივდეს  $\mathbf{P}_-$  ოპერატორის მატრიცა.

**თეორემა 9.** ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორს მოეძებნება ორთონორმირებული ბაზისი  $\mathcal{B}_{\mathbf{P}} \in \mathbb{U}^n$ , განსაზღვრული  $\mathbb{U}^n$  სივრცის გლობალური უნიტარული გარდაქმნის

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} \exp(i\varphi), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{U}^n, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

სიზუსტით, რომელშიც მოცემული ოპერატორის მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$(78) \quad [P]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}} = [P_+]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}} + i[P_-]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}} = \text{diag}\{p_1^{(+)}, \dots, p_n^{(+)}\} + i[p_{jk}^{(-)}], \quad ((p_{jk}^{(\pm)})^* = p_{kj}^{(\pm)}, \quad j, k = \overline{1, n})$$

სადაც  $p_{i_{q-1}+1}^{(+)} < \dots < p_{i_q}^{(+)}$ ,  $p_{i_q k_q}^{(-)} = p_{k_q i_q}^{(-)} > 0$ , თუ  $i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t$ ,  $k_q \in [m_{q-1}+1, m_q]$ , და  $p_{i_q k_q}^{(-)} = p_{k_q i_q}^{(-)} = 0$ , თუ  $i_q \in [1, \sum_{t=1}^q n_t]$ ,  $k_q \in [m_q+1, n]$ . აქ  $m_{q-1} < m_q$ ,  $q = \overline{1, l}$ ,  $m_0 = 0$ ,  $l \geq 1$ .

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ლემა:

**ლემა 1.** თუ ერმიტული  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის  $P = [p_{ik}]_1^n$  მატრიცას არ აქვს კვაზი-დიაგონალური სახე საბაზისისო ვექტორების არც ერთი ნუმერაციისას, მაშინ ან

a)  $P$  მატრიცის არც ერთი არადიაგონალური ელემენტი არ უდრის ნულს, ან

b) მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვები  $m_1, \dots, m_l$ ,  $n_1, \dots, n_l$ , და ბაზისის ისეთი გადანომვრა, რომ უჯრედოვანი მატრიცა  $P_{\mathcal{B}}$  მიიღებს კვაზი-სამდიაგონალურ სახეს:

$$p_{i_q k_q} = p_{k_q i_q} = 0, \quad \text{თუ } i_q \in [1, \sum_{t=1}^q n_t], \quad k_q \in [m_q+1, n],$$

$$p_{i_q k_q} = p_{k_q i_q}^* \neq 0, \quad \text{თუ } i_q \in [1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t, \sum_{t=1}^q n_t], \quad k_q \in [m_{q-1}+1, m_q],$$

სადაც  $q = \overline{1, l}$ ,  $1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t \leq m_{q-1} < m_q$ ,  $m_0 = 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .

**დამტკიცება.** ბაზისის ვექტორების გადანომვრა  $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_k$  იწვევს ერმიტული ოპერატორის  $P$  მატრიცის უნიტარულ გარდაქმნას  $P \rightarrow \tilde{P} = U P U^{-1}$ , ( $U^{-1} = U^+$ ) რომელიც ახორციელებს ამ მატრიცის სტრიქონებისა და სვეტების  $i \rightarrow k$  გადასმას; შედეგად, მატრიცის დიაგონალური ელემენტები რჩება დიაგონალზე. მატრიცის ერმიტულობა, ცხადია, არ ირღვევა.

ცხადია, არადიაგონალურ მატრიცაში არსებობს არანულოვანი არადიაგონალური ელემენტები. თუ ყველა  $p_{ik} \neq 0$ ,  $i \neq k$ , ლემა ჭეშმარიტია ( $l = m_1 = n_1 = 1$ ).

თუ  $P$  მატრიცის ზოგიერთ სტრიქონში არის ნულოვანი არადიაგონალური ელემენტები, მაშინ ამოვარჩიოთ სტრიქონი  $j_1$ ,  $1 \leq j_1 \leq n$ , რომელშიც გვაქვს ასეთი ნულების მაქსიმალური,  $n - m_1 \leq n - 2$  რაოდენობა და  $j_1 \neq 1$  გადასმით გადავიტანოთ პირველ ადგილზე; შემდეგ გადავიტანოთ ამ სტრიქონის ნულების შემცველი სვეტები (გარდა პირველი სვეტისა, რომელსაც უძრავს ვტოვებთ მაშინაც, როცა  $p_{11} = 0$ ) ბოლო  $n - m_1$  ადგილზე. შესაბამისად გადანომრილი ბაზისი აღვნიშნოთ  $\mathcal{B}^{(1)} = \{\vec{e}_i^{(1)} | i = \overline{1, n}\}$ . ოპერატორის მატრიცა  $\mathcal{B}^{(1)}$  ბაზისში აღვნიშნოთ  $P_1$ .

ეს აგება არ არის ცალსახა:  $P_1$  მატრიცის პირველ სტრიქონში ნულოვანი ელემენტების განლაგება არ შეიცვლება, თუ გადავნიშნავთ ვექტორებს  $\vec{e}_2^{(1)}, \dots, \vec{e}_{m_1}^{(1)}$  ან/და  $\vec{e}_{m_1+1}^{(1)}, \dots, \vec{e}_n^{(1)}$ .

ამოვარჩიოთ  $P_1$  მატრიცის ის სტრიქონები, რომლებშიც ბოლო  $n - m_1$  დიაგონალის-ზედა ადგილებზე დგას ნულები. ვთქვათ, გვაქვს  $n_1 - 1$  ასეთი სტრიქონი (გარდა პირველისა). ცხადია,  $n_1 < m_1$  - წინააღმდეგ შემთხვევაში ერმიტული მატრიცა  $P_1$  იქნებოდა კვაზიდიაგონალური.  $\vec{e}_2^{(1)}, \dots, \vec{e}_{m_1}^{(1)}$  ვექტორების გადანომვრით გადავსვათ ეს სტრიქონები  $2, \dots, n_1$  ადგილებზე. მივიღებთ შემდეგი სახის უჯრედოვან მატრიცას:

$$(79) \quad P \rightarrow \tilde{P}_1 = U_1 P U_1^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & m_1 - n_1 & n - m_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^+ & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^+ & P_{33} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \}^{n_1} \\ \}^{m_1 - n_1} \\ \}^{n - m_1} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (U_1^{-1} = U_1^+)$$

რადგან  $n - m_1$  არის  $P$  მატრიცის სტრიქონში ნულების მაქსიმალური რაოდენობა, ყველა ელემენტი  $P_{12}$  უჯრედში და ყველა არადიაგონალური ელემენტი  $P_{11}$  უჯრედში  $\neq 0$ . უჯრედში  $P_{23}$  არსებობს არანულოვანი ელემენტები - წინააღმდეგ შემთხვევაში ერმიტული მატრიცა  $\tilde{P}_1$  იქნებოდა კვაზიდიაგონალური. თუ ამ უჯრედის ყველა ელემენტი  $\neq 0$ , ლემა დამტკიცებულია. თუ  $P_{23}$  მატრიცა შეიცავს ნულოვან ელემენტებს, ამოვარჩიოთ მისი ის სტრიქონი, რომელშიც დგას ნულების მაქსიმალური რაოდენობა,  $\vec{e}_{n_1+1}^{(1)}, \dots, \vec{e}_{m_1}^{(1)}$  ვექტორების გადანომვრით გადავსვათ  $P_{23}$  მატრიცის პირველ ( $\tilde{P}_1$  მატრიცის  $n_1 + 1$ ) ადგილზე და  $\vec{e}_{m_1+1}^{(1)}, \dots, \vec{e}_n^{(1)}$  ვექტორების გადანომვრით გადავსვათ ამ სტრიქონის ნულები ბოლო  $m_2 + 1, \dots, n$  ადგილებზე,  $m_1 < m_2 \leq n - m_1 - 1$ . შემდეგ,  $n_1 + 2, \dots, m_1$  სტრიქონების გადანომვრით, გამოვეყოთ  $P_{23}$  უჯრედის ზედა მარჯვენა კუთხეში ნულებით შედგენილი  $n_2 \times (n - m_2)$  ზომის ბლოკი,  $1 \leq n_2 \leq m_1 - n_1$ . თუ  $n_2 < m_1 - n_1$ , მაშინ  $P_{23}$  უჯრედის დარჩენილ სტრიქონებს შორის ამოვარჩიოთ ის, რომელშიც დგას ნულების მაქსიმალური,  $n - m_3$  რაოდენობა ბოლო  $n - m_2$  სვეტში და შესაბამისი გადანომვრებით გავაგრძელოთ ნულოვანი ბლოკების გამოყოფა. თუ ამ პროცესის შედეგად  $P_{23}$  უჯრედის ქვედა მარჯვენა კუთხეში ჩადგება ელემენტი, რომელიც  $\neq 0$ , ლემა დამტკიცებულია. თუ  $P_{23}$  უჯრედის ქვედა მარჯვენა კუთხეში მივიღებთ ნულებით შედგენილ  $n_q \times (n - m_q)$  ზომის ბლოკს,  $1 \leq m_q \leq n - m_2$  (კერძოდ, თუ  $n_2 = m_1 - n_1 = n_q$ ), მაშინ  $P_{33}$  უჯრედი აუცილებლად შეიცავს არანულოვან ელემენტებს  $(m_q - m_1) \times (n - m_q)$  ზომის ზედა მარჯვენა ბლოკში და ნულოვანი ბლოკების გამოყოფის აღწერილ პროცესს ვაგრძელებთ. ნაბიჯების სასრული  $l$  რაოდენობის შემდეგ  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მატრიცის ბოლო  $n - m_l$  სვეტში ნულებით შედგენილი ბლოკის ქვემოთ ყველა არადიაგონალური ელემენტი იქნება არანულოვანი და პროცესი დასრულდება. ■

**ლემა 2.** თუ  $\mathbf{P}_{\pm}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორების სპექტრი მარტივია, მაშინ  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-$  ოპერატორის მატრიცას აქვს კვაზიდიagonalური სახე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $\mathbf{P}_+$  და  $\mathbf{P}_-$  ერთმანეთს ოპერატორების საკუთარ ვექტორებზე დაჭიმული წრფივი  $k_j$ -განზომილებიანი გარსები,  $\sum_{j=1}^m k_j = n$ , ემთხვევა ერთმანეთს.

**დამტკიცება.** ვთქვათ, საერთოა  $\mathbf{P}_{\pm}$  ოპერატორების  $m$  საკუთარ ვექტორზე დაჭიმული წრფივი გარსები:

$$(80) \quad [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m]_{\mathbf{P}_+} = [\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_m]_{\mathbf{P}_-}, \quad \mathbf{P}_+ \vec{e}_i = p_i^{(+)} \vec{e}_i, \quad \mathbf{P}_- \vec{\eta}_i = p_i^{(-)} \vec{\eta}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

მაშინ, ცხადია, ემთხვევა  $(n-m)$ -განზომილებიანი გარსებიც და  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის საკუთარ (ორთონორმირებულ)  $\mathcal{B}_{\mathbf{P}}$  ბაზისში, (31') ფორმულის გამოყენებით, გვექნება:

$$(P_-)_{jl} = \sum_{i=1}^m p_i^{(-)} \langle \vec{e}_j | \vec{\eta}_i \rangle \langle \vec{\eta}_i | \vec{e}_l \rangle + \sum_{i=m+1}^n p_i^{(-)} \langle \vec{e}_j | \vec{\eta}_i \rangle \langle \vec{\eta}_i | \vec{e}_l \rangle.$$

აქედან  $(P_-)_{jl} = 0$ , თუ  $j \leq m, l \geq m+1$  ან თუ  $l \leq m, j \geq m+1$ :

$$(81) \quad [P_-]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}} = \left[ \begin{array}{cc} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{array} \right]_{\substack{m \\ n-m}} \quad (1 \leq m \leq n-1)$$

და  $[P]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}}$  მატრიცის კვაზიდიagonalობა მტკიცდება ინდუქციით.

საკმარისობა გამომდინარეობს (12) განტოლებებიდან, თუ  $p_i^{(\pm)} \neq p_j^{(\pm)}$ , როცა  $i \neq j$ .

მართლაც, ვთქვათ,  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის საკუთარ  $\mathcal{B}_{\mathbf{P}}$  ბაზისში  $[P]_{\mathcal{B}_{\mathbf{P}}}$  მატრიცას აქვს (81) სახე. მაშინ (12) განტოლებათა სისტემა დაიშლება ორ დამოუკიდებელ სისტემად:

$$(82) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^m (P_{11})_{ik} x_k(p_j) &= p_j x_i(p_j), \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{k=m+1}^n (P_{22})_{ik} x_k(p_j) &= p_j x_i(p_j), \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

რადგან, ლემის პირობით,  $\mathbf{P}_-$  ოპერატორის სპექტრი მარტივია, განტოლებებს  $\det P_{11} = 0$  და  $\det P_{22} = 0$  არ აქვთ საერთო ფესვები და (82) სისტემებიდან ერთ-ერთს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ამიტომ (12) სისტემის არატრივიალურ ამონახსნებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \vec{x}(p_j) = \vec{\eta}_j &= (x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}, 0, \dots, 0), \quad p_j \in \{p_1, \dots, p_m \mid \det P_{11} = 0, \det P_{22} \neq 0\}, \quad j = \overline{1, m}, \\ \vec{x}(p_j) = \vec{\eta}_j &= (0, \dots, 0, x_{m+1}^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}), \quad p_j \in \{p_{m+1}, \dots, p_n \mid \det P_{11} \neq 0, \det P_{22} = 0\}, \quad j = \overline{m+1, n}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის საკუთარ  $\mathcal{B}_{\mathbf{P}}$  ბაზისში (80) პირობები შესრულებულია. ამიტომ ეს პირობები სრულდება ნებისმიერ (ორთონორმირებულ) ბაზისშიც. ■

**თეორემის დამტკიცება.** ჩავწეროთ  $\mathbf{P}$  ოპერატორი  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის საკუთარ ბაზისში. ზოგად შემთხვევაში  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის სპექტრი მარტივია, ე.ი. მისი საკუთარი ბაზისი ფიქსირებულია გადანომვრისა და (23) გარდაქმნის სიზუსტით. მარტივი სპექტრის მქონე  $\mathbf{P}_{\pm}$  ოპერატორების საკუთარ ვექტორებზე დაჭიმული წრფივი  $k_j$ -განზომილებიანი გარსები,  $\sum_{j=1}^m k_j = n$ , საზოგადოდ არ ემთხვევა ერთმანეთს. ამიტომ, 2.2 ლემის თანახმად,  $P_-$  მატრიცას არ აქვს კვაზიდიagonalური სახე  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის საკუთარი ბაზისის არც ერთი ნუმერაციისას. მაშინ, 2.1 ლემის თანახმად, მოიძებნება ბაზისის ისეთი ნუმერაცია, რომელშიც  $P_-$  მატრიცას აქვს კვაზი-სამდიagonalური სახე. ამით ბაზისი ფიქსირდება  $P_-$  მატრიცის დიagonalურ,  $n_q \times n_q$  ზომის,  $q = \overline{1, l}$ , უჯრედებში შემავალი სტრიქონების (და სვეტების) გადანომვრის და (23) გარდაქმნის სიზუსტით. შევარჩიოთ ბაზისის ნუმერაცია ისე, რომ შესრულდეს პირობები:

$$(83) \quad p_{i_{q-1}+1}^{(+)} < \dots < p_{i_q}^{(+)}, \quad i_q \in \left[ 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t, \sum_{t=1}^q n_t \right], \quad q = \overline{1, l}, \quad l \geq 1.$$

ცხადია, (23) სახის ნებისმიერი გარდაქმნა შეცვლის  $p_{jk}^{(-)} = |p_{jk}^{(-)}| \exp i\phi_{jk} \in \mathbb{C}$  რიცხვების მხოლოდ ფაზებს:

$$(84) \quad \phi_{jk} \rightarrow \phi_{jk}^0 = \phi_{jk} + \varphi_j - \varphi_k, \quad j, k = \overline{1, n},$$

ხოლო (83) უტოლობებს დატოვებს უძრავს.  $\mathbf{P}_-$  ოპერატორის ერმიტულობის გამო პირობები ყოველთვის შესრულებულია  $(p_{jk}^{(-)})^* = p_{kj}^{(-)}$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ . ამრიგად, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შესაძლებელია ისე შევარჩიოთ (23) გარდაქმნის ფაზები  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , რომ ერმიტული  $P_-$  მატრიცის არანულოვანი უჯრედების პირველი სტრიქონების ელემენტები (გარდა  $p_{11}^{(-)}$  ელემენტისა) გახდეს ნამდვილი დადებითი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ წრფივ განტოლებათა (84) სისტემის მაქსიმალური რანგია  $r_m = n - 1$ . ამიტომ (84) განტოლებათა სისტემიდან მოიძებნება არაუმეტეს  $n - 1$  ფაზა, ხოლო არანაკლებ ერთი ფაზა რჩება განუსაზღვრელი. თუ, მაგალითად,

$$p_{1k}^{(-)} = |p_{1k}^{(-)}| \exp i\phi_{1k} \neq 0, \quad k = \overline{2, n},$$

მაშინ ყველა ფაზა  $\phi_{1k}$ ,  $k = \overline{2, n}$ , განსაზღვრულია და (84) განტოლებათა სისტემის მაქსიმალური რანგი მიიღწევა. მოვითხოვთ, რომ (23) გარდაქმნის შემდეგ გვქონდეს  $\phi_{1k}^0 = 0$ ,  $k = \overline{2, n}$ . ამ შემთხვევაში (84) განტოლებების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$(85) \quad \varphi_k = \phi_{1k} + \varphi_1, \quad k = \overline{2, n}, \quad \forall \varphi_1 \in \mathbb{R}.$$

ზოგად შემთხვევაში, 2.1 ლემის თანახმად, განსაზღვრულია  $P_-$  მატრიცის არანულოვანი უჯრედების პირველი სტრიქონების ელემენტების ფაზები

$$\phi_{i_q k_q}, \quad i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t, \quad k_q \in [m_{q-1} + 1, m_q], \quad q = \overline{1, l}. \quad (m_0 = 0)$$

ამიტომ, თუ მოვითხოვთ, რომ გვქონდეს  $\phi_{i_q k_q}^0 = 0$ ,  $i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t$ ,  $k_q \in [m_{q-1} + 1, m_q]$ ,  $q = \overline{1, l}$ ,  $m_0 = 0$ , განტოლებათა სისტემა (84) დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$(86) \quad \varphi_k = \phi_{i_q k} + \varphi_{i_q}, \quad i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t < k = \overline{m_{q-1} + 1, m_q}, \quad q = \overline{1, l}.$$

(86) განტოლებები თავსებადია, რადგან,  $\mathbf{P}_-$  ოპერატორის ერმიტულობის ძალით,  $\phi_{11} = 0$  (ცხადია, იგივე მართებულია (85) განტოლებებისათვისაც).

ვინაიდან, 2.1 ლემის ძალით,  $i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t \leq m_{q-1}$ ,  $q = \overline{2, l}$ , (86) ფორმულები გვაძლევს:

$$\varphi_{i_q} = \phi_{i_{q-1} i_q} + \varphi_{i_{q-1}} = \sum_{t=2}^q \phi_{i_{-1} i_t} + \varphi_1$$

და, შედეგად, ვპოულობთ (23) გარდაქმნის  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$  ფაზებს ( $\forall \varphi_1 \in \square$ ):

$$(87) \quad \begin{aligned} \varphi_k &= \phi_{1k} + \varphi_1, \quad k = \overline{1, m_1}, & (q = 1) \\ \varphi_k &= \phi_{i_q k} + \sum_{t=2}^q \phi_{i_{-1} i_t} + \varphi_1, \quad k = \overline{m_{q-1} + 1, m_q}. & (q = \overline{2, l}) \end{aligned}$$

თუ  $\mathbf{P}_\pm$  ოპერატორების სპექტრი მარტივია, ამ გარდაქმნის შემდეგ ორთონორმირებული ბაზისი  $\mathcal{B}_P \in \mathbb{U}^n$  ფიქსირებული იქნება გლობალური უნიტარული გარდაქმნის სიზუსტით, რომლის მატრიცა პროპორციულია ერთეულოვანი  $E \in M_n$  მატრიცისა:

$$(88) \quad U = E \exp(i\varphi_1) \in M_n(\mathbb{C}). \quad \left( E = [\delta_{jk}], \quad \forall \varphi_1 \in \square \right)$$

ცხადია, (88) გარდაქმნის ოპერატორი კომუტირებს ნებისმიერ  $\mathbf{Q}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორთან ((88) მატრიცა კომუტირებს ნებისმიერ  $Q$  მატრიცასთან) და, მაშასადამე, ნებისმიერი ოპერატორის ორბიტა (88) ჯგუფში იქნება წერტილი (მატრიცა  $Q$  ინვარიანტული იქნება (88) გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ).  $\blacksquare$

**შედეგი 5.** ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის დამახასიათებელი უნიტარულად ინვარიანტული დამოუკიდებელი ნამდვილი პარამეტრების რაოდენობა არ აღემატება  $n^2+1$  და არ შეიძლება შემცირდეს უნიტარული გარდაქმნით, თუ  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მატრიცის ელემენტებზე რაიმე დამატებითი პირობა (ბმა) არ არის დადებული.

**დამტკიცება.** (78) წარმოდგენაში დამოუკიდებელი ნამდვილი სიდიდეების მაქსიმალური რაოდენობა გვაქვს მაშინ, როცა ყველა  $p_{jk}^{(-)} \neq 0, j, k = \overline{1, n}$ , ე.ი. არის არაუმეტეს

$$n+n+(n-1)+2 \cdot (n-1)(n-2)/2 = n^2+1.$$

ამ სიდიდეების უნიტარული ინვარიანტობა გამომდინარეობს 2.3 წინადადებიდან და ფორმულიდან (31) (იხ. თეორემა 2.1), რომელიც მართებულია ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ერმიტული  $\mathbf{P}_+$  და  $\mathbf{P}_-$  კომპონენტებისათვის. ■

**შედეგი 6.** ზოგადი სახის ორი მატრიცა  $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$  უნიტარულად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(89) \quad [P]_{\mathfrak{B}_p} = [Q]_{\mathfrak{B}_q},$$

რაც გვაძლევს  $n(n+3)/2$  კომპლექსურ (მაგრამ მხოლოდ  $n^2+1$  ნამდვილ) პირობას.

**შენიშვნა.** ფორმულები (78) და (89) გვაძლევს არაკომპუტირებადი ერმიტული ოპერატორების წყვილების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის აუცილებელ და საკმარის პირობებსაც.

ამრიგად, (78) და (89) ფორმულები პასუხობს დასმულ ამოცანას ზოგადი სახის ოპერატორების (ან არაკომპუტირებადი ერმიტული ოპერატორების წყვილების) უნიტარული კლასიფიცირებისათვის აუცილებელი და საკმარისი ინვარიანტული პირობების პოვნის შესახებ [40]. მაგრამ ნაპოვნი კრიტერიუმი ამ სახით მოუხერხებელია გამოსაყენებლად, რადგან (78) და (89) პირობები ჩაწერილია არაკომპარირებად, სპეციალურად აგებულ ბაზისში, რომლის პოვნა, საზოგადოდ, არ არის მარტივი ამოცანა.

შესაბამისი კოვარიანტული პირობების (იხ. [40]) მოსაძებნად შემოვიღოთ ინვარიანტები

$$(90) \quad I_{\lambda, \mu, \zeta, \eta}(\mathbf{P}) = 2^{-\lambda-\mu-\zeta-\eta} \operatorname{tr}((\mathbf{P}+\mathbf{P}^+)^{\lambda}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^+)^{\zeta}(\mathbf{P}+\mathbf{P}^+)^{\mu}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^+)^{\eta}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda}(i\mathbf{P}_-)^{\zeta} \mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta}), \quad \lambda, \mu, \zeta, \eta \in \square$$

და ავაგოთ ამ ინვარიანტებით შემდეგი სახის მატრიცა  $\mathcal{J}(\mathbf{P}) \in M_n(\mathbb{C})$ :

$$(91) \quad \mathcal{J}(\mathbf{P}) = \operatorname{diag}\{t_1^{(+)}(\mathbf{P}), \dots, t_n^{(+)}(\mathbf{P})\} + [t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P})]_1^n,$$

სადაც

$$(92) \quad t_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{P}) = I_{0\lambda, 00}(\mathbf{P}) = \operatorname{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda}, \quad t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}) = -I_{(\lambda-1)(\mu-1), 12}(\mathbf{P}) = i \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2), \quad \lambda, \mu = \overline{1, n}.$$

**განმარტება 7.** (91) მატრიცას  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  ეუწოდოთ ზოგადი სახის  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-$  ოპერატორის ინვარიანტების მატრიცა.

შევისწავლოთ ინვარიანტების  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  მატრიცის სტრუქტურა.

რადგან ერმიტული ოპერატორის ნატურალური ხარისხები ერმიტულია, გვექნება:

$$(93) \quad t_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{P}) = \operatorname{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda} \in \square, \quad \lambda = 1, 2, \dots.$$

ცნობილია (იხ., მაგ., [8a], გვ. 56), რომ ნებისმიერი  $A, B, C \in M_n(\square)$  მატრიცებისათვის

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T, \quad \operatorname{tr}(A^+) = \operatorname{tr}(A^*) = (\operatorname{tr} A)^*, \quad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(ABC)^T = \operatorname{tr}(C^T B^T A^T) = [\operatorname{tr}(C^+ B^+ A^+)]^*.$$

ამიტომ (90) განმარტებიდან ვპოულობთ:

$$(94) \quad \begin{aligned} I_{\lambda, \mu, \zeta, \eta}(\mathbf{P}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda}(i\mathbf{P}_-)^{\zeta} \mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta} \mathbf{P}_+^{\lambda}(i\mathbf{P}_-)^{\zeta}) = I_{\mu, \lambda, \eta, \zeta}(\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda}(i\mathbf{P}_-)^{\zeta} \mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta})^T = \\ &= (-1)^{\eta+\zeta} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda}(i\mathbf{P}_-)^{\eta} \mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\zeta})^* = (-1)^{\eta+\zeta} I_{\lambda, \mu, \eta, \zeta}^*(\mathbf{P}) = (-1)^{\eta+\zeta} I_{\mu, \lambda, \zeta, \eta}^*(\mathbf{P}), \quad (\lambda, \mu, \zeta, \eta \geq 1) \\ I_{0, \mu, \zeta, \eta}(\mathbf{P}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta+\zeta}) = (-1)^{\eta+\zeta} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\mu}(i\mathbf{P}_-)^{\eta+\zeta})^* = (-1)^{\eta+\zeta} I_{0, \mu, 0, (\zeta+\eta)}^*(\mathbf{P}) = (-1)^{\eta+\zeta} I_{0, \mu, \zeta, \eta}^*(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

აქედან,  $\zeta=1, \eta=2$  მნიშვნელობების შეტანით, ვპოულობთ პირობებს, რომლებსაც აკმაყოფილებს  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  ინვარიანტების მატრიცის ელემენტები  $t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}) = -I_{(\lambda-1)(\mu-1), 12}(\mathbf{P})$ :

$$(95) \quad \begin{aligned} t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}) &= -\left(t_{\mu\lambda}^{(-)}(\mathbf{P})\right)^*, & 1 \leq \lambda, \mu \leq n; \\ t_{0\lambda}^{(-)}(\mathbf{P}) &= t_{\lambda 0}^{(-)}(\mathbf{P}) = -\left(t_{0\lambda}^{(-)}(\mathbf{P})\right)^* = -\left(t_{\lambda 0}^{(-)}(\mathbf{P})\right)^*, & 1 \leq \lambda \leq n. \end{aligned}$$

ამრიგად,  $\left[t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P})\right]_1^n$  მატრიცის დიაგონალი, პირველი სტრიქონი და პირველი სვეტი წმინდა წარმოსახვითია, დანარჩენი ელემენტები კი ანტიერმიტულობის პირობებს აკმაყოფილებს. ამიტომ, (90)-(93) ფორმულების გათვალისწინებით, ბუნებრივია ინვარიანტების მატრიცის წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$(96) \quad \mathcal{J}(\mathbf{P}) = \mathcal{J}_+(\mathbf{P}) + i\mathcal{J}_-(\mathbf{P}),$$

სადაც აღნიშნულია:

$$(97) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_+(\mathbf{P}) &= \text{diag} \left\{ t_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{P}) \right\}_{\lambda=1, \overline{n}} = \text{diag} \left\{ \text{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda} \right\}_{\lambda=1, \overline{n}}, \\ \mathcal{J}_-(\mathbf{P}) &= -i \left[ t_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}) \right]_{\lambda, \mu=1, \overline{n}} = \left[ \text{tr} \left( \mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2 \right) \right]_{\lambda, \mu=1, \overline{n}}. \quad (\mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-) \end{aligned}$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ (96)-(97) ფორმულებით განმარტებული ინვარიანტების  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  მატრიცის სტრუქტურა ემთხვევა (78) მატრიცის სტრუქტურას ზოგადი სახის  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-$  ოპერატორისათვის, თუ  $[\mathbf{P}_{\pm}]_{\mathfrak{B}}$  მატრიცების  $p_{jk}^{(\pm)}$  ელემენტებზე არ არის დადებული რაიმე დამატებითი პირობა (ბმა), კერძოდ, თუ  $[\mathbf{P}_-]_{\mathfrak{B}}$  მატრიცის ყველა ელემენტი  $\neq 0$ .

ნაშრომში [40] ნაჩვენებია, რომ ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრულია 2.9 თეორემით, და ამ ოპერატორის ინვარიანტების (96) მატრიცის დამოუკიდებელი ელემენტები ურთიერთ ცალსახად გადაისახება ერთმანეთში.

**თეორემა 10.** ზოგადი სახის  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ინვარიანტების  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  მატრიცის დამოუკიდებელი ელემენტების სიმრავლე  $\mathcal{S}(\mathbf{P})$ :

$$(98) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{P}) &= \left\{ \text{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda} \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \text{tr} \left( \mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2 \right) \mid 1 \leq \lambda \leq \mu \leq n \right\} \\ & \quad \left( \mathbf{P} = \mathbf{P}_+ + i\mathbf{P}_-, \mathbf{P}_+ = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^+)/2, \mathbf{P}_- = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^+)/2i \right) \end{aligned}$$

შედგება ამ ოპერატორის  $[\mathbf{P}]_{\mathfrak{B}}$  მატრიცის  $p_{jk}^{(\pm)}$  ელემენტების ( $1 \leq j \leq k \leq n$ ) დამოუკიდებელი ფუნქციებისაგან.

**დამტკიცება.** ჩავწეროთ (98) სიმრავლის ელემენტები 2.9 თეორემით განსაზღვრულ  $\mathfrak{B}_{\mathbf{P}}$  ბაზისში. გამოსახულებების შემოკლებისათვის აღვნიშნოთ  $p_j^{(+)} = x_j$ .  $\mathfrak{B}_{\mathbf{P}}$  ბაზისში მატრიცა  $[\mathbf{P}_+]_{\mathfrak{B}}$  დიაგონალურია და (97) მატრიცების ელემენტები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$(99_1) \quad \text{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda} = \sum_{j=1}^n x_j^{\lambda}, \quad \lambda = \overline{1, n};$$

$$(99_2) \quad \text{tr} \left( \mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2 \right) = \sum_{j, k=1}^n x_j^{\lambda-1} p_{jk}^{(-)} x_k^{\mu-1} (P_-^2)_{kj} \quad 1 \leq \lambda \leq \mu \leq n.$$

გარდავქმნათ ჯამი (99<sub>2</sub>) ფორმულაში:

$$\begin{aligned} & \sum_{j, k=1}^n x_j^{\lambda-1} p_{jk}^{(-)} x_k^{\mu-1} (P_-^2)_{kj} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \left\{ x_j^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} + x_k^{\lambda-1} x_j^{\mu-1} \right\} p_{jk}^{(-)} (P_-^2)_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \left\{ x_j^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} - x_k^{\lambda-1} x_j^{\mu-1} \right\} p_{jk}^{(-)} (P_-^2)_{kj} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j > k=1}^n \left\{ x_j^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} + x_k^{\lambda-1} x_j^{\mu-1} \right\} \left\{ p_{jk}^{(-)} (P_-^2)_{kj} + p_{kj}^{(-)} (P_-^2)_{jk} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ x_k^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} + x_k^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} \right\} p_{kk}^{(-)} (P_-^2)_{kk} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j > k=1}^n \left\{ x_j^{\lambda-1} x_k^{\mu-1} - x_k^{\lambda-1} x_j^{\mu-1} \right\} \left\{ p_{jk}^{(-)} (P_-^2)_{kj} - p_{kj}^{(-)} (P_-^2)_{jk} \right\}. \end{aligned}$$

აქედან,  $p_{kj}^{(-)} p_{jl}^{(-)} p_{lk}^{(-)} = (p_{jk}^{(-)} p_{kl}^{(-)} p_{lj}^{(-)})^*$  თანაფარდობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \leq k}}^n \frac{1}{\rho(j,k)} \operatorname{per} \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} \operatorname{Re}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\} + i \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \det \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} \operatorname{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\},$$

სადაც  $\operatorname{per} A$  არის  $A = [a_{jk}]_1^n$  მატრიცის პერმანენტი (იხ. დისერტაციის III თავი და, მაგ., მონოგრაფია [57]):

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per}[a_{jk}]_1^n = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)}$$

(აჯამვა ხდება ყველა შესაძლო გადანაცვლებებით  $j \rightarrow \sigma(j)$ ), ხოლო  $\rho(j,k)$  აღნიშნავს მოწესრიგებულ  $(j,k)$  წყვილში შემავალი რიცხვების ჯერადობების ფაქტორიალების ნამრავლს.

ამრიგად, (99) იხლიხება განტოლებათა ორ დამოუკიდებელ სისტემად ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებისათვის:

$$(100_1) \quad \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) = -\operatorname{Im} t_{\lambda\mu}^{(-)} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \leq k}}^n \frac{1}{\rho(j,k)} \operatorname{per} \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} \operatorname{Re}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$$

$$(100_2) \quad \operatorname{Im} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) = \operatorname{Re} t_{\lambda\mu}^{(-)} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \det \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} \operatorname{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}.$$

$$(1 \leq \lambda \leq \mu \leq n)$$

(99) განტოლებებთან ერთად (100<sub>1,2</sub>) შეადგენს განტოლებათა სისტემას  $x_j = p_j^{(+)}$ ,  $p_{jk}^{(-)}$  უცნობების მიმართ. ამასთან, ხარისხოვანი ჯამები (99) განსაზღვრავს  $x_1, \dots, x_n$  სიდიდეებს ნუმერაციის სიზუსტით, რომელიც, 2.9 თეორემის თანახმად, ფიქსირებულია ცალსახად. ამიტომ (100<sub>1,2</sub>) ფორმულებში  $\operatorname{Re}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$  და  $\operatorname{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$  წევრებთან მდგარი კოეფიციენტები სრულად განისაზღვრება სიდიდეებით  $\operatorname{tr} \mathbf{P}_+^{\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, n}$ . შევნიშნოთ, რომ როცა  $\lambda = \mu$  ან  $\lambda = 1$ , (100<sub>2</sub>) ფორმულაში გვაქვს  $0 = 0$  სახის იგივეობა. ამრიგად, არატრივიალური თანაფარდობების რაოდენობა (100<sub>2</sub>) ფორმულაში არის  $(n-2)(n-1)/2$ , ხოლო (100<sub>1</sub>) ფორმულაში  $-n(n+1)/2$ , ანუ იმდენივე, რამდენიც გვაქვს უცნობი  $\operatorname{Im} p_{jk}^{(-)}$  და  $\operatorname{Re} p_{jk}^{(-)}$ , შესაბამისად.

გადავნიშნოთ წყვილები  $(\lambda, \mu)$  და  $(j, k)$  ლექსიკოგრაფულად და შემოვიღოთ აღნიშვნები (იხ. შრომა [67] და დისერტაციის III თავი, §3.4)

$$\operatorname{Re}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\} = a_{\alpha}, \quad \operatorname{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\} = b_{\alpha}, \quad \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) = \mathcal{U}_{\beta}, \quad \operatorname{Im} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) = \mathcal{V}_{\beta'}$$

$$\frac{1}{\rho(j,k)} \operatorname{per} \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} = \mathfrak{p}_{\beta\alpha}, \quad \det \begin{bmatrix} x_j^{\lambda-1} & x_j^{\mu-1} \\ x_k^{\lambda-1} & x_k^{\mu-1} \end{bmatrix} = \mathfrak{d}_{\beta\alpha}; \quad \alpha = (\lambda, \mu), \quad \beta = (j, k).$$

ამ აღნიშვნებში ფორმულები (100<sub>1,2</sub>) ლებულობს მარტივ სახეს:

$$(101_1) \quad \mathcal{U}_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{C_{n+1}^2} \mathfrak{p}_{\beta\alpha} a_{\alpha}, \quad \beta = \overline{1, C_{n+1}^2},$$

$$(101_2) \quad \mathcal{V}_{\beta'} = \sum_{\alpha=1}^{C_n^2} \mathfrak{d}_{\beta'\alpha} b_{\alpha}, \quad \beta' = \overline{1, N'}, \quad (N' = (n-2)(n-1)/2)$$

ამასთან, მულტიინდექსები  $\alpha, \beta$  ეკუთვნის არაკლებად მიმდევრობათა სიმრავლეს, ხოლო მულტიინდექსები  $\alpha', \beta'$  – მკაცრად ზრდადი მიმდევრობების სიმრავლეს (იხ. §3.4):

$$\alpha, \beta \in G_{2,n} = \{\omega \mid \omega = (\omega_1 \leq \omega_2)\}, \quad \alpha', \beta' \in Q_{2,n} = \{\omega \mid \omega = (\omega_1 < \omega_2)\}, \quad 1 \leq \omega_i \leq n, \quad i=1,2.$$

მიუხედავად (101<sub>2</sub>) განტოლებებს  $n-1$  იგივეობა, რომლებიც მიიღება (100<sub>2</sub>) განტოლებებიდან, როცა  $\lambda=1$  (და რომლებიც სრულდება ნებისმიერი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორისათვის):

$$(102) \quad \operatorname{Im} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^3) = 0 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n (x_k^{\mu-1} - x_j^{\mu-1}) \operatorname{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}, \quad \mu = \overline{2, n}.$$



(101<sub>2</sub>) და (102) ერთად შეადგენს  $n(n-1)/2$  განტოლებიან სისტემას  $n(n-1)/2$  უცნობისათვის  $\text{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$ ,  $1 \leq j < k \leq n$ . როგორც ნახვევებია დისერტაციის III თავში (იხ. აგრეთვე [67]), (101<sub>1</sub>) და  $\{(102) \cup (101_2)\}$  სისტემების დეტერმინანტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$(103) \quad \det[\mathbf{p}_{\beta\alpha}]_1^{C_{n+1}^2} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)^{n+1} \neq 0, \quad \det[\mathbf{d}_{\beta\alpha}]_1^{C_n^2} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)^{n-1} \neq 0$$

და, მაშასადამე, დაიყვანება  $\mathbf{P}_+$  ოპერატორის მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტზე, რომელიც არის ამ განტოლების კოეფიციენტების მთელი ფუნქცია. ამიტომ სიდიდეები  $a_\alpha$  და  $b_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, C_{n+1}^2}$ , ცალსახად განისაზღვრება (99<sub>1,2</sub>) განტოლებების მარცხენა მხარეების  $-\text{tr} \mathbf{P}_+^\lambda$ ,  $\text{Retr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2)$ ,  $\text{Imtr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2)$  მნიშვნელობებით,  $\lambda \leq \mu = \overline{1, n}$ . ამასთან, ცხადია, ნებისმიერი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორისათვის  $\text{Im}\{p_{kk}^{(-)}(P_-^2)_{kk}\} = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ , ხოლო  $\text{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$  ( $1 \leq j < k \leq n$ ) სიდიდეებს შორის დამოუკიდებელია მხოლოდ  $N' = (n-2)(n-1)/2$  სიდიდე-კერძოდ, ყველა  $\text{Im}\{p_{1k}^{(-)}(P_-^2)_{k1}\}$ ,  $k = \overline{2, n}$ , არის დანარჩენი  $\text{Im}\{p_{jk}^{(-)}(P_-^2)_{kj}\}$  სიდიდეების წრფივი კომბინაცია.

თეორემის დამტკიცებისთვის საკმარისია ვახვევოთ, რომ (98) სიმრავლის ელემენტები არის  $|p_{jk}^{(-)}| \equiv p_{jk} = p_{kj}$  ( $1 \leq j \leq k \leq n$ ) და  $\phi_{jk} = -\phi_{kj}$  ( $2 \leq j < k \leq n$ ) ცვლადების დამოუკიდებელი ფუნქციები ( $p_{jk} \exp i\phi_{jk} = p_{jk}^{(-)} \in \square$ ,  $p_{jk}, \phi_{jk} \in \square$ ), ანუ, რომ  $\{\mathcal{S}(\mathbf{P})\} \Rightarrow \{[P]_{\mathcal{P}_P}\}$  ასახვის იაკობიანი  $J \neq 0$ .

პირდაპირი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ იაკობიანი  $J$  წარმოადგენს  $p_{11}$  ცვლადის  $n+1$  ხარისხის პოლინომს, რომლის უფროსი კოეფიციენტი, თანახმად თეორემის პირობებისა ( $x_j \neq x_k$ ,  $p_{jk} \neq 0$ ,  $j \neq k$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ ) და (103) ფორმულებისა,  $\neq 0$ :

$$(104) \quad J = \frac{\partial(t_\lambda^{(+)}(\mathbf{P}), \text{Ret}_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}), \text{Imt}_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}))}{\partial(x_1, \dots, x_n, p_{11}, \dots, p_{1n}, p_{jk}, \phi_{jk})} = \det[\lambda x_j^{\lambda-1}]_1^n \cdot \frac{\partial(\text{Ret}_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}), \text{Imt}_{\lambda\mu}^{(-)}(\mathbf{P}))}{\partial(p_{11}, \dots, p_{1n}, p_{jk}, \phi_{jk})} = \\ = \det[\lambda x_j^{\lambda-1}]_1^n \cdot \det[\mathbf{p}_{\beta\alpha}]_1^{C_{n+1}^2} \cdot \det[\mathbf{d}_{\beta\alpha}]_1^{C_n^2} \cdot \left\{ [3!2^{n-1} (p_{12} \dots p_{1n})^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} p_{jk}] p_{11}^{n+1} + \dots \right\}.$$

მაშასადამე, ასახვა  $\{\mathcal{S}(\mathbf{P})\} \Rightarrow \{[P]_{\mathcal{P}_P}\}$  წარმოადგენს ბიექციას. ■

**შედეგი 7.** ზოგადი სახის ორი ოპერატორი  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  უნიტარულად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი  $n(n+3)/2$  კომპლექსური ( $n^2+1$  ნამდვილი) დამოუკიდებელი ინვარიანტული პირობა

$$(105) \quad \mathcal{S}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}(\mathbf{Q}).$$

**შედეგი 8.** სიმრავლე (98)

$$\mathcal{S}(\mathbf{P}) = \left\{ \text{tr} \mathbf{P}_+^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \text{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_- \mathbf{P}_+^{\mu-1} \mathbf{P}_-^2) \mid 1 \leq \lambda \leq \mu \leq n \right\}$$

წარმოადგენს არაერმიტული ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალურ ფუნქციონალურ ბაზისს.

თუ ოპერატორი (ამ ოპერატორის მატრიცის ელემენტები რომელიმე ორთონორმირებულ ბაზისში) აკმაყოფილებს რაიმე დამატებით პირობებს, მაშინ (105) პირობებს შორის ყველა არ იქნება დამოუკიდებელი. მაგალითად, თუ არაერმიტული ოპერატორი  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  არის ნორმალური, ე.ი. თუ მისი ერმიტული  $\mathbf{P}_+$  და  $\mathbf{P}_-$  კომპონენტები კომუტირებს, მაშინ  $[P]_{\mathcal{P}_P}$

მატრიცას აქვს დიაგონალური (27) სახე:  $[P]_{\mathcal{P}_P} = \text{diag}\{p_1^{(+)}, \dots, p_n^{(+)}\} + i[p_{jk}^{(-)}] = [\delta_{jk}(p_j^{(+)} + ip_j^{(-)})]_1^n$ ,

ე.ი. ყველა  $p_{jk}^{(-)} = 0$ ,  $j \neq k$ ,  $j, k = \overline{1, n}$  და (104) იაკობიანი  $J = 0$ .

მარტივი საჩვენებელია, რომ სამართლიანია

**წინადადება 21.**  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ნორმალური ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების სიმრავლე

$$(106) \quad \{\operatorname{tr} \mathbf{P}_+^\lambda\} \cup \{\operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_-)\}, \quad \lambda = \overline{1, n},$$

არის ნორმალური ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მინიმალური რაციონალური ბაზისი. ამასთან, თუ  $\mathbf{P}_\pm$  ოპერატორებს არ ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), (106) ბაზისი არის თავისუფალი, ე.ი. მისი ელემენტები ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია.

**დამტკიცება.**  $\mathcal{B}_P$  ბაზისში (106) სიმრავლის ელემენტები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$(107) \quad \operatorname{tr} \mathbf{P}_+^\lambda = \sum_{j=1}^n p_j^{(+)\lambda}, \quad \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_-) = \sum_{j=1}^n p_j^{(+)\lambda-1} p_j^{(-)}. \quad (\lambda = \overline{1, n})$$

ცხადია, ამ ბაზისში ნორმალური  $\mathbf{P}: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის ნებისმიერი პოლინომური ინვარიანტი გამოისახება (107) ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების და  $p_j^{(-)}$  ელემენტების სიმეტრიული პოლინომით და, სიმეტრიული პოლინომების შესახებ ძირითადი თეორემის ძალით, პოლინომურად გამოისახება  $\operatorname{tr} \mathbf{P}_\pm^\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, n}$ ) ხარისხოვანი წევრებით. განტოლებები (107) ფორმალურად ემთხვევა (40) განტოლებებს გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული ოპერატორის საკუთარი რიცხვების  $r_j$  ჯერადობებისათვის. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 2.6, რომლის თანახმად, ხარისხოვანი წევრები – ინვარიანტები  $\operatorname{tr} \mathbf{P}_\pm^\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, n}$ ) რაციონალურად გამოისახება (106) სიმრავლის ელემენტებით.

(107) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ასახვა

$$(108) \quad \{\operatorname{tr} \mathbf{P}_+^\lambda, \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_-) | \lambda = \overline{1, n}\} \Rightarrow \{p_j^{(+)}, p_j^{(-)} | j = \overline{1, n}\},$$

რომლის იაკობიანია

$$(109) \quad J = \frac{\partial(\operatorname{tr} \mathbf{P}_+^\lambda, \operatorname{tr}(\mathbf{P}_+^{\lambda-1} \mathbf{P}_-))}{\partial(p_j^{(+)}, p_j^{(-)})} = \det[\lambda p_j^{(+)\lambda-1}]_1^n \cdot \det[p_j^{(+)\lambda-1}]_1^n = n! \prod_{1 \leq j < k \leq n} (p_k^{(+)} - p_j^{(+)})^2 \neq 0,$$

არის ბიექცია. ამიტომ, თუ  $p_j^{(+)}, p_j^{(-)}$  ელემენტებს არ ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა, (106) ბაზისი შედგება ფუნქციონალურად (და, მაშასადამე, პოლინომურად) დამოუკიდებელი ინვარიანტებისგან, რომელთა საშუალებით ცალსახად განისაზღვრება  $\mathbf{P}$  ოპერატორის მატრიცის ელემენტები კანონიკურ  $\mathcal{B}_P$  ბაზისში და, მაშასადამე, ოპერატორის ნებისმიერი ინვარიანტული (კერძოდ, პოლინომური) ფუნქცია. ■

**შენიშვნა.** (105) პირობები იძლევა არაკომუტირებადი ერმიტული  $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორების წყვილების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის აუცილებელ და საკმარის პირობებს. სიმრავლე (98) შედგება  $\mathbf{P}_\pm: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  არაკომუტირებადი წყვილის ერთობლივი უნიტარული პოლინომური ინვარიანტებისგან, რომლებიც, 2.10 თეორემის თანახმად, არის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი და, მაშასადამე, პოლინომურად დამოუკიდებელიც.

კომუტირებადი ერმიტული  $\mathbf{P}_\pm: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორების წყვილების უნიტარული კლასიფიცირებისათვის აუცილებელ და საკმარის ინვარიანტებს შეიცავს სიმრავლე (106).

თუ  $p_j^{(+)}, p_j^{(-)}$  ელემენტებს ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), მაგალითად, თუ  $\mathbf{P}_-: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  ოპერატორის სპექტრი გადაგვარებულია, მაშინ (106) ბაზისი არ არის თავისუფალი, ე.ი. მისი შემადგენელი ინვარიანტები არ არის დამოუკიდებელი. ასეთ შემთხვევაში, §2.3-ში განხილული შემთხვევის ანალოგიურად, არსებობს სიზიგიები (რაციონალური ბმები) (106) ბაზისის ინვარიანტებს შორის, რომლებიც გამოისახება (72) ფორმულებით (იხ. შედეგი 2.4):

$$\tilde{D} \begin{pmatrix} 1, & \dots, & l, & l+1 \\ 1, & \dots, & l, & l+k \end{pmatrix} = 0 \quad (k = \overline{1, n-l})$$

$D_l(\mathbf{P}_-) \equiv \det[I_{00, (\zeta-1)(\eta-1)}(\mathbf{P})]_{1 \leq \zeta, \eta \leq l} > 0$  მინორის ყველა მთავარი მინორისათვის (აქ  $l$  აღნიშნავს  $p_j^{(-)}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) ნამდვილ რიცხვთა შორის ერთმანეთისგან განსხვავებულთა რაოდენობას).

## §2.5. ნამდვილი ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტები

ეკვილიურ სივრცეში მოქმედი ზოგადი სახის  $\mathbf{T}, \mathbf{R}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების ( $T, R \in M_n(\mathbb{R})$  მატრიცების) ორთოგონალური მსგავსებისათვის (105) პირობები არ არის საკმარისი.

მართლაც, როგორც აღვნიშნეთ §1-ში, ეკვილიურ სივრცეში ზოგადი სახის  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორი ( $T \in M_n(\mathbb{R})$  მატრიცა) ურთიერთცალსახად გამოისახება მისი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული კომპონენტებით (იხ. ფორმულები (28), რომლებიც ეკვილიურ სივრცეში ცვლის (25), (26) ფორმულებს):

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-, & \mathbf{T}_\pm &= (\mathbf{T} \pm \mathbf{T}^T)/2, \\ T &= T_+ + T_-, & T_\pm &= (T \pm T^T)/2 = \pm T_\pm^T.\end{aligned}$$

შესაბამისი ცვლილებები გვექნება (90) და (94) ფორმულებშიც. კერძოდ:

$$(90') \quad I_{\lambda, \mu, \zeta, \eta}^\square(\mathbf{T}) = 2^{-\lambda - \mu - \zeta - \eta} \text{tr} \left( (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)^\lambda (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)^\zeta (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)^\mu (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)^\eta \right) = \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\lambda \mathbf{T}_-^\zeta \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^\eta \right), \quad \lambda, \mu, \zeta, \eta \in \square$$

$$(94') \quad \begin{aligned}I_{\lambda, \mu, \zeta, \eta}^\square(\mathbf{T}) &= \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\lambda \mathbf{T}_-^\zeta \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^\eta \right) = \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^\eta \mathbf{T}_+^\lambda \mathbf{T}_-^\zeta \right) = \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\lambda \mathbf{T}_-^\eta \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^\zeta \right)^T = (-1)^{\eta + \zeta} \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\lambda \mathbf{T}_-^\eta \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^\zeta \right) = \\ &= I_{\mu, \lambda, \eta, \zeta}^\square(\mathbf{T}) = (-1)^{\eta + \zeta} I_{\lambda, \mu, \eta, \zeta}^\square(\mathbf{T}) = (-1)^{\eta + \zeta} I_{\mu, \lambda, \eta, \zeta}^\square(\mathbf{T}), \quad \lambda, \mu, \zeta, \eta \geq 1,\end{aligned}$$

$$I_{0, \mu, \zeta, \eta}^\square(\mathbf{T}) = \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^{\eta + \zeta} \right) = \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^{\eta + \zeta} \right)^T = (-1)^{\eta + \zeta} \text{tr} \left( \mathbf{T}_+^\mu \mathbf{T}_-^{\eta + \zeta} \right) = (-1)^{\eta + \zeta} I_{0, \mu, \zeta, \eta}^\square(\mathbf{T}).$$

აქედან ვხედავთ, რომ ნებისმიერი  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორისათვის

$$(110) \quad I_{\lambda, \lambda, 1, 2}^\square(\mathbf{T}) = I_{0, \lambda, 1, 2}^\square(\mathbf{T}) = 0, \quad \lambda \in \square$$

და, მაშასადამე,  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის ინვარიანტების (106) სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ  $n + [n(n-1)/2 - (n-1)] = n + (n-1)(n-2)/2$

ნამდვილ დამოუკიდებელ ელემენტს, რაც ნაკლებია ოპერატორის  $[T]_{\mathfrak{B}_T}$  მატრიცის დამოუკიდებელ (ნამდვილ) ელემენტთა რაოდენობაზე  $\mathbf{T}$  ოპერატორის კანონიკურ ბაზისში.

თეორემა 2.9 კანონიკური ბაზისის  $\mathfrak{B}_T$  არსებობის შესახებ რჩება თითქმის შეუცვლელი. კერძოდ, გვაქვს (იხ. შრომა [40])

**თეორემა 11.** ზოგადი სახის  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორს მოეძებნება ორთონორმირებული ბაზისი  $\mathfrak{B}_T \in \mathbb{E}^n$ , განსაზღვრული  $\mathbb{E}^n$  სივრცის გლობალური (ნამდვილი) ორთოგონალური

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x}' = (-1)^\sigma \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (\sigma = 0; 1)$$

გარდაქმნის სიზუსტით, რომელშიც მოცემული ოპერატორის მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$(111) \quad [T]_{\mathfrak{B}_T} = [T_+]_{\mathfrak{B}_T} + [T_-]_{\mathfrak{B}_T} = \text{diag} \{ t_1^{(+)}, \dots, t_n^{(+)} \} + [t_{jk}^{(-)}], \quad \left( t_{jk}^{(\pm)} = \pm t_{kj}^{(\pm)}, \quad j, k = \overline{1, n} \right)$$

სადაც  $t_{i_{q-1}+1}^{(+)} < \dots < t_{i_q}^{(+)}$ ,  $t_{i_q k_q}^{(-)} = -t_{k_q i_q}^{(-)} > 0$ , თუ  $i_q = 1 + \sum_{t=1}^{q-1} n_t$ ,  $k_q \in [m_{q-1}+1, m_q]$ , და  $t_{i_q k_q}^{(-)} = t_{k_q i_q}^{(-)} = 0$ , თუ  $i_q \in [1, \sum_{t=1}^q n_t]$ ,  $k_q \in [m_q+1, n]$ . აქ  $m_{q-1} < m_q$ ,  $q = \overline{1, l}$ ,  $m_0 = 0$ ,  $l \geq 1$ .

**დამტკიცება** ამ შემთხვევაშიც ეყრდნობა 1 და 2 ლემებს და დაიყვანება 2.9 თეორემის დამტკიცებაში  $t_{jk}^{(\pm)} = (t_{kj}^{(\pm)})^*$  კომპლექსური სიდიდეების ნამდვილი  $t_{jk}^{(\pm)} = \pm t_{kj}^{(\pm)}$  სიდიდეებით შეცვლაზე ( $\phi_{jk} = \text{argt } t_{jk}^{(-)}$  ფაზების შეცვალაზე  $0, \pi$  მნიშვნელობებით). ■

ვინაიდან ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში ანტისიმეტრიული  $T_- \in M_n(\mathbb{R})$  მატრიცის დიაგონალური ელემენტები ნულებია, ხოლო  $[T]_{\mathfrak{B}_T}$  კანონიკური მატრიცა, ცხადია, შედგება  $\mathbf{T}$  ოპერატორის ორთოგონალური ინვარიანტებისგან, 2.11 თეორემიდან გამომდინარეობს 2.5 და 2.6 შედეგების ანალოგები:

**შედეგი 9.** ზოგადი სახის  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის დამახასიათებელი ორთოგონალურად ინვარიანტული დამოუკიდებელი (ნამდვილი) პარამეტრების რაოდენობა არ აღემატება  $n(n+1)/2$  და არ შეიძლება შემცირდეს ორთოგონალური გარდაქმნით, თუ  $\mathbf{T}$  ოპერატორის მატრიცის ელემენტებზე რაიმე დამატებითი პირობა (ბმა) არ არის დადებული.

**დამტკიცება** დაიყვანება (111) წარმოდგენაში დამოუკიდებელი (ნამდვილი) სიდიდეების მაქსიმალური რაოდენობის დათვლაზე. ■

**შედეგი 10.** ზოგადი სახის ორი მატრიცა  $T, R \in M_n(\mathbb{R})$  ორთოგონალურად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(112) \quad [T]_{\mathcal{B}_T} = [R]_{\mathcal{B}_R},$$

რაც გვაძლევს  $n(n+1)/2$  დამოუკიდებელ (ნამდვილ) პირობას.

$\mathbf{T}, \mathbf{R}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების ( $T, R \in M_n(\mathbb{R})$  მატრიცების) ორთოგონალური მსგავსების ინვარიანტული კრიტერიუმის დასადგენად (98) სიმრავლის ნულოვანი (110) ელემენტები შევცვალოთ შესაბამისი (ინვარიანტული) არანულოვანი ელემენტებით ისე, რომ მივიღოთ (112) ფორმულაში შემავალი  $n(n+1)/2$  დამოუკიდებელი სიდიდის ტოლფასი სიმრავლე. შრომაში [40] ჩამოყალიბებულია შესაბამისი

$$(113) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{T}) = \left\{ \text{tr} \mathbf{T}_+^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \text{tr}(\mathbf{T}_+^{\lambda-1} \mathbf{T}_-^2) \mid \lambda = \overline{1, n-1} \right\} \cup \left\{ \text{tr}(\mathbf{T}_+^{\lambda-1} \mathbf{T}_- \mathbf{T}_+^{\mu-1} \mathbf{T}_-^2) \mid 2 \leq \lambda < \mu \leq n \right\}$$

$$(\mathbf{T}_\pm = (\mathbf{T} \pm \mathbf{T}^T)/2, \mathbf{T} = \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-)$$

შედგება ამ ოპერატორის  $[T]_{\mathcal{B}_T}$  მატრიცის  $t_{jk}^{(\pm)}$  ელემენტების ( $1 \leq j \leq k \leq n$ ) დამოუკიდებელი ფუნქციებისაგან.

**დამტკიცება.** ჩავწეროთ (113) სიმრავლის ელემენტები 2.11 თეორემით განსაზღვრულ  $\mathcal{B}_T$  ბაზისში და გამოვითვალოთ  $\mathcal{S}^\square(\mathbf{T}) \Rightarrow \{[T]_{\mathcal{B}_T}\}$  ასახვის იაკობიანი  $J$ . შემოკლებისათვის აღვნიშნოთ

$$t_j^{(+)} = s_j, \quad t_{jk}^{(-)} = A_{jk} = -A_{kj}, \quad T_- = A.$$

ვინაიდან  $I_{\lambda, 0, 0}^\square(\mathbf{T}) = \text{tr} \mathbf{T}_+^\lambda = \sum_{j=1}^n s_j^\lambda, \lambda = \overline{1, n}$ , გვექნება

$$J = \frac{\partial(I_{\lambda, 0, 0}^\square, I_{\lambda-1, 0, 2}^\square, I_{\lambda-1, \mu-1, 1, 2}^\square)}{\partial(s_1, \dots, s_n, A_{lm})} = \frac{\partial(I_{\lambda, 0, 0}^\square)}{\partial(s_1, \dots, s_n)} \cdot \frac{\partial(I_{\lambda-1, 0, 2}^\square, I_{\lambda-1, \mu-1, 1, 2}^\square)}{\partial(A_{12}, \dots, A_{n-1n})} =$$

$$= \det[\lambda s_j^{\lambda-1}]_1^n \cdot J_1 = J_1 n! \prod_{1 \leq j < k \leq n} (s_k - s_j),$$

სადაც

$$J_1 = \frac{\partial(I_{\lambda-1, 0, 2}^\square, I_{\lambda-1, \mu-1, 1, 2}^\square)}{\partial(A_{12}, \dots, A_{n-1n})} = \frac{\partial(\text{tr}(\mathbf{T}_+^{\lambda-1} \mathbf{T}_-^2), \text{tr}(\mathbf{T}_+^{\lambda-1} \mathbf{T}_- \mathbf{T}_+^{\mu-1} \mathbf{T}_-^2))}{\partial(A_{12}, \dots, A_{n-1n})}.$$

ზოგად შემთხვევაში, როცა  $s_j \neq s_k$  ( $j \neq k$ ), და  $A_{lm} \neq 0, 1 \leq l < m \leq n$ , ანუ როცა  $\mathcal{B}_T$  ბაზისი ფიქსირებულია ცალსახად, როგორც გვიჩვენებს გამოთვლები  $J_1 \neq 0, J \neq 0$  და, მაშასადამე, ასახვა  $\mathcal{S}^\square(\mathbf{T}) \Rightarrow \{[T]_{\mathcal{B}_T}\}$  წარმოადგენს ბიექციას. ■

**შედეგი 11.** ზოგადი სახის ორი ოპერატორი  $\mathbf{T}, \mathbf{R}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ორთოგონალურად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი  $n(n+1)/2$  დამოუკიდებელი ნამდვილი ინვარიანტული პირობა

$$(114) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{T}) = \mathcal{S}^\square(\mathbf{R}).$$

**შედეგი 12.** სიმრავლე (113) შეადგენს ზოგადი სახის  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალურ ფუნქციონალურ ბაზისს.

**შენიშვნა.** თუ  $\mathbf{T}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის  $\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-$  კომპონენტებს ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), მაგალითად, თუ  $\mathbf{T}_+: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის სპექტრი გადაგვარებულია, მაშინ, §2.3-ში განხილული შემთხვევის ანალოგიურად, ინვარიანტების (113) ბაზისის ელემენტებს შორის არსებობს რაციონალური ბმები (სიზიგიები). ასეთ შემთხვევებში ინვარიანტების ბაზისის მინიმალურობის საკითხი და შესაბამისი სიზიგიების პოვნა სპეციალურ შესწავლას მოითხოვს.

აღწერილი მიდგომა გამოსადგვია ზოგადი სახის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული  $\mathbf{S}, \mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვისაც:

**შედეგი 13.** ზოგადი სახის ნამდვილი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული  $\mathbf{S}, \mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალურ ფუნქციონალურ ბაზისს წარმოადგენს სიმრავლე

$$(115) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}, \mathbf{A}) = \left\{ \operatorname{tr} \mathbf{S}^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \operatorname{tr}(\mathbf{S}^{\lambda-1} \mathbf{A}^2) \mid \lambda = \overline{1, n-1} \right\} \cup \left\{ \operatorname{tr}(\mathbf{S}^{\lambda-1} \mathbf{A} \mathbf{S}^{\mu-1} \mathbf{A}^2) \mid 2 \leq \lambda < \mu \leq n \right\}.$$

**შედეგი 14.** ზოგადი სახის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნამდვილი ოპერატორების ორი წყვილი  $(\mathbf{S}_1, \mathbf{A}_1), (\mathbf{S}_2, \mathbf{A}_2)$  ორთოგონალურად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი  $n(n+1)/2$  დამოუკიდებელი ნამდვილი ინვარიანტული პირობა

$$(116) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}_1, \mathbf{A}_1) = \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}_2, \mathbf{A}_2).$$

ნათელია, რომ არაკომუტირებადი სიმეტრიული ნამდვილი  $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2): \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის (116) პირობები არ არის საკმარისი, რადგან  $\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}$  ბაზისში  $[\mathbf{S}_2]_{\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}}$  მატრიცას აქვს (საზოგადოდ არანულოვანი) დიაგონალური ელემენტები.

**თეორემა 13.** ზოგადი სახის ნამდვილი არაკომუტირებადი სიმეტრიული  $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2): \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილის ინვარიანტების სიმრავლე

$$(117) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \left\{ \operatorname{tr} \mathbf{S}_1^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \operatorname{tr}(\mathbf{S}_1^{\lambda-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1^{\mu-1} \mathbf{S}_2) \mid 1 \leq \lambda \leq \mu \leq n \right\}$$

შედგება ამ ოპერატორების  $[\mathbf{S}_1]_{\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}}, [\mathbf{S}_2]_{\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}}$  მატრიცების ელემენტების დამოუკიდებელი ფუნქციებისაგან.

**დამტკიცება.** სიმრავლე (117) შეიცავს  $n + n(n+1)/2 = n(n+3)/2$  ნამდვილ ელემენტს, იმდენივეს, რამდენსაც (ზოგადი სახის) მატრიცების  $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$  წყვილი  $\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}$  ბაზისში. ასახვა

$$(118) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) \Rightarrow \left\{ [\mathbf{S}_1]_{\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}}, [\mathbf{S}_2]_{\mathcal{B}_{\mathbf{S}_1}} \right\}$$

წარმოადგენს ბიექციას, რადგან ამ ასახვის იაკობიანი  $J \neq 0$ . ■

**შედეგი 15.** სიმრავლე (117) წარმოადგენს ზოგადი სახის ნამდვილი არაკომუტირებადი სიმეტრიული  $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2): \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილის ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალურ ფუნქციონალურ ბაზისს.

**შედეგი 16.** ზოგადი სახის ნამდვილი არაკომუტირებადი სიმეტრიული ოპერატორების ორი წყვილი  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$  ორთოგონალურად მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი  $n(n+3)/2$  დამოუკიდებელი ნამდვილი ინვარიანტული პირობა

$$(119) \quad \mathcal{S}^\square(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathcal{S}^\square(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2).$$

თუ ნამდვილი სიმეტრიული ოპერატორები  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  (ამ ოპერატორების  $S_1, S_2$  მატრიცები რომელიმე ორთონორმირებულ ბაზისში) აკმაყოფილებს რაიმე დამატებით პირობებს, მაშინ (117) პირობებს შორის ყველა არ იქნება დამოუკიდებელი. მაგალითად, თუ ეს ოპერატორები კომუტირებს, მაშინ  $[S_2]_{\mathcal{B}_s}$  მატრიცას აქვს დიაგონალური სახე და იაკობიანი  $J=0$ . აღვნიშნოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში  $\mathcal{B}_s$  ბაზისი აღარ არის ცალსახა.

**თეორემა 14.** სიმეტრიული კომუტირებადი  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალურ რაციონალურ ბაზისს შეადგენს სიმრავლე

$$(120) \quad \{\operatorname{tr} \mathbf{S}_1^\lambda\} \cup \{\operatorname{tr}(\mathbf{S}_1^{\lambda-1} \mathbf{S}_2)\}, \quad \lambda = \overline{1, n},$$

ამასთან, თუ  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  ოპერატორებს არ ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), ბაზისი (120) არის თავისუფალი, ე.ი. მისი  $2n$  ელემენტი ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია.

**დამტკიცება** სიტყვა-სიტყვით იმეორებს 2.21 წინადადების დამტკიცებას.  $\blacksquare$

**შენიშვნა.** თუ სიმეტრიულ კომუტირებად  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორებს ედება დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), მაგალითად, თუ  $\mathbf{S}_2: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის სპექტრი გადაგვარებულია, მაშინ (120) ბაზისის შემადგენელი ინვარიანტებიც არ არის დამოუკიდებელი, კერძოდ, სიზიგიები (რაციონალური ბმები) (120) ბაზისის ინვარიანტებს შორის გამოისახება ფორმულებით (72) (იხ. შედეგი 2.4)

$$\tilde{D} \begin{pmatrix} 1, & \dots, & l, & l+1 \\ 1, & \dots, & l, & l+k \end{pmatrix} = 0, \quad (k = \overline{1, n-l})$$

$D_l(S_2) \equiv \det[\operatorname{tr}(\mathbf{S}_2^{\zeta+\eta-2})]_{1 \leq \zeta, \eta \leq l} > 0$  მინორის ყველა მთარშიებული მინორისათვის (აქ  $l$  აღნიშნავს  $\mathbf{S}_2$  ოპერატორის საკუთარ რიცხვებს შორის ერთმანეთისგან განსხვავებულთა რაოდენობას).

მარტივი სპექტრის მქონე ნამდვილი სიმეტრიული ოპერატორი  $\mathbf{S}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  არასოდეს არ კომუტირებს ნამდვილ ანტისიმეტრიულ ოპერატორთან  $\mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ , მაგრამ შეიძლება კომუტირებდეს ამ ოპერატორის კვადრატთან – სიმეტრიულ ოპერატორთან  $\mathbf{A}^2: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ . ასეთი ოპერატორების მოქმედება  $\mathbf{S}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის საკუთარ ვექტორებზე აიწერება შემდეგი ფორმულებით (იხ., მაგ., [42], გვ. 258):

$$(121) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}|\bar{x}_k\rangle &= -a_k|\bar{y}_k\rangle, & \mathbf{A}|\bar{y}_k\rangle &= a_k|\bar{x}_k\rangle, & \mathbf{A}|\bar{x}_l\rangle &= 0, \\ \mathbf{A}^2|\bar{x}_k\rangle &= -a_k^2|\bar{x}_k\rangle, & \mathbf{A}^2|\bar{y}_k\rangle &= -a_k^2|\bar{y}_k\rangle, & \mathbf{A}^2|\bar{x}_l\rangle &= 0 \\ & \left( \{|\bar{x}_k\rangle, |\bar{y}_k\rangle, |\bar{x}_l\rangle \mid k = \overline{1, m}; l = \overline{2m+1, n}\} = \mathcal{B}_s \right) \end{aligned}$$

მაშასადამე,  $\mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის  $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_s}$  მატრიცას  $\mathbf{S}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის საკუთარ (ორთონორმირებულ)  $\mathcal{B}_s$  ბაზისში (საბაზისო ვექტორების შესაბამისი გადანომვრის შემდეგ) აქვს კვაზიდიაგონალური სახე:

$$(122) \quad [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_s} = \operatorname{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & a_m \\ -a_m & 0 \end{bmatrix}, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-2m} \right\},$$

ამასთან,  $|\bar{x}_k\rangle, |\bar{y}_k\rangle, k = \overline{1, m}$ , ვექტორებზე დაჭიმული ორგანზომილებიანი სიბრტყეები არის  $\mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორის ინვარიანტული ქვესივრცეები. (121) ფორმულებიდან ნათელია, რომ  $a_k \in \mathbb{R}$  რიცხვების ნიშანი იცვლება ამ სიბრტყეებში საბაზისო ვექტორების არეკვლებისას

$$|\bar{x}_k\rangle \rightarrow |\bar{x}'_k\rangle = \pm |\bar{x}_k\rangle, \quad |\bar{y}_k\rangle \rightarrow |\bar{y}'_k\rangle = \mp |\bar{y}_k\rangle, \quad k = \overline{1, m},$$

ამიტომ, მოცემული  $\mathbf{S}, \mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  ოპერატორების წყვილისათვის კანონიკური ბაზისი  $\mathcal{B}_{\mathbf{S}, \mathbf{A}}$  ყოველთვის შეგვიძლია ავარჩიოთ ისე, რომ გვქონდეს  $a_k > 0, k = \overline{1, m}$ . ცხადია, ბაზისი  $\mathcal{B}_{\mathbf{S}, \mathbf{A}}$

ფიქსირდება ნამდვილი ორთოგონალური გარდაქმნების სიზუსტით:

$$(123) \quad U = \text{diag} \left\{ \underbrace{\pm E_2, \dots, \pm E_2}_m, \underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_{n-2m} \right\} \in M_n(\square), \quad \left( E_2 = [\delta_{jk}]_{j,k=1,2} \right)$$

რომლებიც ადგენენ  $\mathbf{S}, \mathbf{A}$  ოპერატორების მატრიცების  $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$  წყვილის ინვარიანტობის ჯგუფს.

(122) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ  $\mathbf{A}^2$  სიმეტრიული ოპერატორის სპექტრი გადაგვარებულია; მისი საკუთარი რიცხვები შეადგენს მულტისიმრავლეს

$$\left\{ -a_1^2, -a_1^2, \dots, -a_m^2, -a_m^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2m} \right\}.$$

საზოგადოდ,  $\mathbf{A}^2$  სიმეტრიული ოპერატორის ერთმანეთისგან განსხვავებული საკუთარი რიცხვების რაოდენობა  $q$  მოიძებნება §2.3-ში აღწერილი მეთოდით, (43) თანაფარდობიდან:

$$(124) \quad \det T_k(\mathbf{A}^2) = 0, \quad k \geq q+1.$$

თუ  $\mathbb{E}^n$  სივრცის განზომილება კენტიია, მაშინ  $\mathbf{A}^2$  სიმეტრიული ოპერატორის საკუთარი რიცხვთა შორის ერთი მაინც  $=0$ , ხოლო დანარჩენი საკუთარი რიცხვების ჯერადობებია  $\geq 2$ , ე.ი. (122) მატრიცის დამოუკიდებელი პარამეტრების მაქსიმალური რაოდენობაა  $[n/2]$  (სიმბოლო  $[x]$  აღნიშნავს  $x \in \square$  რიცხვის მთელ ნაწილს). ამრიგად, მოცემული ოპერატორების  $\mathbf{S}, \mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  წყვილის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი ინვარიანტების მაქსიმალური რაოდენობა არ აღემატება  $n + [n/2]$  და სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 15.** ვთქვათ, მოცემულია სიმეტრიული ოპერატორი  $\mathbf{S}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ , რომელსაც აქვს მარტივი სპექტრი და ანტისიმეტრიული ოპერატორი  $\mathbf{A}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ , ისეთი, რომ  $\mathbf{A}^2$  კომუტირებს მოცემულ  $\mathbf{S}$  ოპერატორთან. მაშინ ოპერატორების  $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$  წყვილის ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალურ რაციონალურ ბაზისს შეადგენს სიმრავლე

$$(125) \quad \left\{ \text{tr} \mathbf{S}^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \text{tr} (\mathbf{S}^{\mu-1} \mathbf{A}^2) \mid \mu = \overline{1, [n/2]} \right\},$$

ამასთან, თუ  $\mathbf{S}, \mathbf{A}$  ოპერატორებს არ ედება რაიმე დამატებითი შეზღუდვა (ბმა), მაშინ (125) ინვარიანტების ბაზისის  $n + [n/2]$  ელემენტი ფუნქციონალურად დამოუკიდებელია.

**დამტკიცება** ამ შემთხვევაშიც დაიყვანება შესაბამისი იაკობიანის გამოთვლაზე. ■

**შენიშვნა.** 2.15 თეორემის პირობით განსაზღვრული  $\mathbf{S}, \mathbf{A}$  ოპერატორების წყვილის (125) ინვარიანტების ბაზისი შეიძლება შევცვალოთ ბაზისით

$$(125') \quad \left\{ \text{tr} \mathbf{S}^\lambda \mid \lambda = \overline{1, n} \right\} \cup \left\{ \text{tr} (\mathbf{A}^{2\mu}) \mid \mu = \overline{1, [n/2]} \right\},$$

რომელიც აგრეთვე არის მინიმალური რაციონალური, მაგრამ შეიცავს  $\mathbf{A}$  ოპერატორის უფრო მაღალ ხარისხებს, ვიდრე ბაზისი (125).

**განმარტება 8.** ოპერატორის (მატრიცის) ინვარიანტს ეწოდება დაყვანადი, თუ ის პოლინომურად გამოისახება ოპერატორის (მატრიცის) უფრო დაბალი ხარისხებით აგებული ინვარიანტებით.

მონოგრაფიებში [23], [24] გამოთქმულია მოსაზრება (დაუმტკიცებლად), რომ ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური ბაზისი არ უნდა შეიცავდეს დაყვანად ინვარიანტებს. (125) და (125') ფორმულებით მოცემული კონტრმაგალითი გვიჩვენებს, რომ ეს მოსაზრება, საზოგადოდ, მცდარია და რომ ეს საკითხი მოითხოვს უფრო საფუძვლიან შესწავლას.

თეორემები 2.14 და 2.15 გვაძლევს ამ თეორემების პირობებში განმარტებული ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის საკმარის და აუცილებელ პირობებს. ამრიგად, ინვარიანტების სისტემები (34), (59), (98), (106), (113), (117), (120), (125) გვაძლევს ოპერატორების წყვილების უნიტარული და ორთოგონალური კლასიფიცირების ამოცანის სრულ გადაწყვეტას.

## II თავის დასკვნები

1.  $n$ -განზომილებიან უნიტარულ  $U^n$  (ეგკლიდურ  $E^n$ ) სივრცეში მოქმედი, გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული)  $P$  ოპერატორისათვის ნაპოვნია მისი დამახასიათებელი დამოუკიდებელი პარამეტრების მინიმალური რაოდენობა  $n(P)$  და ნაჩვენებია, რომ ეს რაოდენობა ემთხვევა რამზის რიცხვს (ფ-ები (58-59)).

2. ნაპოვნია გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში (წინადადება 20).

3.  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში ნაპოვნია ორი ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები (თეორემა 5).

4.  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში ზოგადი სახის ოპერატორისათვის განმარტებულია კანონიკური ბაზისი და ცხადი სახით აგებულია ამ ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმა (თეორემები 9, 11, ფ-ები (78), (111)).

5. აგებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების მინიმალური სრული კრებული – პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი; დამტკიცებულია ძირითადი თეორემა ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმისა და პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ურთიერთცალსახა შესაბამისობის შესახებ. დამტკიცებულია აგებული პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ელემენტთა ფუნქციონალური დამოუკიდებლობა.

6. ნაპოვნია ზოგადი სახის ორი ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები (თეორემა 7, ფ-ლა (89)); ამასთან, გაუმჯობესებულია პირსის შეფასება ასეთი მსგავსებისათვის საკმარისი პირობების რაოდენობის შესახებ (ჩვენს მიერ ნაპოვნი შეფასებაა  $N \leq n^2 + 1$ , ნაცვლად პირსის მიერ მოცემული  $N \leq 2^{2n^2}$  რაოდენობისა) და ნაჩვენებია (ფ-ლა (2.105)), რომ ზოგად შემთხვევაში ეს შეფასება არ შეიძლება გაუმჯობესდეს.

7. შემოღებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მატრიცა (ფ-ები (2.90-91)) და ნაჩვენებია, რომ ამ მატრიცის სტრუქტურა ემთხვევა ოპერატორის კანონიკური მატრიცის სტრუქტურას.

8. ნაპოვნია სხვადასხვა სიმეტრიის მქონე ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობები მათი ინვარიანტების ბაზისების ტერმინებში (თეორემები 2.12-15); ბოლომდე გადაწყვეტილია ოპერატორთა ასეთი წყვილების უნიტარული და ორთოგონალური კლასიფიცირების ამოცანა.



## თავი III

ვანდერმონდის მატრიცის განზოგადებები  
და მათი თვისებები

ამ თავში განიხილება ორიგინალური შედეგები, რომლებიც მიღებულია შრომებში [44a,b], [40], [41], [67], [96] და წარმოადგენს [20], [56]-[58], [123]-[125] შრომებში მოცემული ცნებებისა და თანაფარდობების ვრცელ განზოგადებას, ამასთან, დამტკიცებები ჩატარებულია უფრო დაწვრილებით, ვიდრე ორიგინალურ შრომებში.

## §3.1. ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცა

ჯერადი ინტერპოლაციის კლასიკური ამოცანა (იხ., მაგ., [55], გვ. 104-106; [126], გვ. 13-16) გვიჩვენებს, რომ არსებობს  $N-1$  ხარისხის ერთადერთი პოლინომი  $P_{N-1}$ , რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$(1) \quad P_{N-1}^{(k-1)}(x_j) = y_j^{(k-1)}, \quad k = \overline{1, r_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

სადაც  $x_j$  და  $y_j^{(k-1)}$  არის მოცემული ელემენტები ნებისმიერი  $\mathbb{F}$  ველიდან;  $x_j \neq x_l$ , როცა  $j \neq l$ ,  $r_j \geq 1$  და  $N = \sum_{j=1}^n r_j$ . (1) პირობები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც წრფივი განტოლებების სისტემა  $P_{N-1}$  პოლინომის კოეფიციენტების მიმართ. მაშინ ასეთი პოლინომის არსებობა და ერთადერთობა ნიშნავს, რომ (1) განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისგან.

აღნიშნოთ (იხ. [44a,b] და მიმოხილვა [20])  $M_l(\mathbb{F})$  ყველა ისეთი  $l \times l$  მატრიცის სიმრავლე, რომელთა ელემენტები ეკუთვნის  $\mathbb{F}$  ველს,  $l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . სიმბოლოთი

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \equiv V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) \in M_N(\mathbb{F}), \quad (x_j \in \mathbb{F}, r_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n})$$

აღნიშნოთ ბლოკ-უჯრედოვანი  $N \times N$  მატრიცა

$$(2) \quad V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = [w_1(x_1) \mid w_2(x_2) \mid \dots \mid w_n(x_n)],$$

სადაც  $w_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , აღნიშნავს მართკუთხა მატრიცებს

$$(3) \quad w_j(x) = \left[ (x^{i-1})^{(k-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}}$$

ასეთი ტიპის მატრიცები ბუნებრივად ჩნდება სხვა ამოცანებშიც, მაგალითად, უნიტარულ (ეკვიდურ) სივრცეში ოპერატორების პოლინომიური ინვარიანტების ბაზისის შესწავლისას (იხ. თავი II და შრომები [40], [41]).

კერძო შემთხვევაში, როდესაც  $r_1 = \dots = r_n = 1$ , გვაქვს  $N = n$  და მატრიცა (2) დაიყვანება ვანდერმონდის მატრიცაზე  $V = V(x_1, \dots, x_n) \in M_n(\mathbb{F})$ :

$$V = V(x_1, 1; \dots; x_n, 1) = \left[ x_j^{i-1} \right]_1^n,$$

რომლის დეტერმინანტი გამოითვლება ცნობილი (იხ., მაგ., [124], გვ. 50) ფორმულით

$$(4) \quad \det \left[ x_j^{i-1} \right]_1^n = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k).$$

**განმარტება 1.** (2) მატრიცას ეუწოდებთ ვანდერმონდის  $(r_1, \dots, r_n)$ -ჯერად მატრიცას. როდესაც  $r_1 = \dots = r_n = r$ , ამ მატრიცას ეუწოდებთ ვანდერმონდის  $r$ -ჯერად მატრიცას და აღნიშნავთ  $V(x_1, \dots, x_n; r)$ .

ეს მატრიცები განმარტებული და შესწავლილია შრომებში [44a,b].

იმ შემთხვევებში, როდესაც ველი  $\mathbb{F} = \square, \square$ , სამართლიანია [44] შემდეგი

**თეორემა 1.** ნებისმიერი  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$  და  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$  რიცხვებისათვის ვანდერმონდის  $(r_1, \dots, r_n)$ -ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტი გამოითვლება ფორმულით

$$(5) \quad \det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \left( \prod_{j=1}^n \prod_{k=0}^{r_j-1} (k!) \right) \prod_{1 \leq i < l \leq n} (x_l - x_i)^{r_i r_l}.$$

კერძოდ, როდესაც  $r_1 = \dots = r_n = r \in \mathbb{N}$ , გვაქვს

$$(5') \quad \det V(x_1, \dots, x_n; r) = \left( \prod_{k=0}^{r-1} (k!) \right)^n \prod_{1 \leq i < l \leq n} (x_l - x_i)^{r^2}.$$

თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

**ლემა 1.** ნებისმიერი  $U \in M_N(\mathbb{F})$  ბლოკ-უჯრედოვანი მატრიცისათვის,

$$(6) \quad U = [u_1(x_1) \mid u_2(x_2) \mid \dots \mid u_n(x_n)],$$

სადაც

$$(7) \quad u_j(x) = \left[ \left( f_i(x) \phi_{jk}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}}^{(k-1)} \right]_{j = \overline{1, n}},$$

$$n, N, r_j \in \mathbb{N}, \quad 1 < n < N, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N, \quad x \in \mathbb{F},$$

ხოლო ფუნქციები  $f_i, \phi_{jk}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\phi_{jk} \in C^{k-1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}), \quad k = \overline{1, r_j},$$

$$f_i \in C^{r-1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}), \quad r = \max\{r_j \mid j = \overline{1, n}\},$$

სამართლიანია თანაფარდობა

$$(8) \quad \det U = \det[\nu_1(x_1) \mid \dots \mid \nu_n(x_n)] \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{r_j} (\phi_{jk}(x_j))$$

სადაც

$$\nu_j(x) = \left[ \left( f_i(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}}^{(k-1)} \right].$$

**ლემის დამტკიცება** (იხ. [44]). მართკუთხა  $u_j(x)$  მატრიცის  $k$ -ური სვეტი აღვნიშნოთ  $[k]_j$ ,  $k = \overline{1, r_j}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . ცხადია, (8) სამართლიანია ტრივიალურ შემთხვევაში, როდესაც რომელიმე  $j$  ნომრისათვის,  $1 < j < n$ , გვაქვს  $\phi_{j1}(x_j) = 0$ . ვთქვათ, ყველა  $j = \overline{1, n}$  ნომრისათვის გვაქვს  $\phi_{j1}(x_j) \neq 0$ . მაშინ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (7) მატრიცის სვეტების ელემენტარული გარდაქმნებით ხერხდება მათი დაყვანა შემდეგ სახეზე:

$$(9) \quad [k]_j \rightarrow [k]_j = \left[ \left( f_i(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}}^{(k-1)} \phi_{jk}(x) \right]_{1 \leq i \leq N}.$$

(9) ფორმულის სამართლიანობა დავამტკიცოთ ინდუქციით. სვეტს  $[1]_j$  უკვე აქვს (9) სახე:

$$[1]_j = [1]_j = \left[ f_i(x) \phi_{j1}(x) \right]_{1 \leq i \leq N}, \quad j = \overline{1, n}.$$

დავუშვათ, ყველა სვეტს  $\{[k]_j \mid k = \overline{1, m_j}\}$ ,  $1 \leq m_j \leq r_j - 1$ , აგრეთვე აქვს საჭირო სახე (9). თუ  $k$ -ს რომელიმე მნიშვნელობისათვის,  $1 < k < m_j$ , გვაქვს  $\phi_{jk}(x) = 0$ , მაშინ ფორმულა (8) დამტკიცებულია. თუ ახლა  $k$ -ს და  $j$ -ს ყველა მნიშვნელობებისათვის,  $k = \overline{1, m_j}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , გვაქვს

$$(10) \quad \phi_{jk}(x) \neq 0,$$

მაშინ (7) მატრიცის  $[m_j+1]_j$  სვეტს დავუმატოთ ჯამი  $\sum_{q=1}^{m_j} C_{m_j}^{q-1} \left( -\phi_{j, m_j+1}^{(m_j-q+1)}(x) / \phi_{jq}(x) \right) [q]_j$ , რომელიც, (10) პირობის თანახმად, კორექტულად არის განმარტებული. ვინაიდან აქ  $1 \leq q \leq m_j$ ,

ინდუქციური დაშვების ძალით, ჯამში შემავალ  $[q]_j$  სვეტს აქვს (9) სახე. ამიტომ გვექნება

$$\sum_{q=1}^{m_j} C_{m_j}^{q-1} \left( -\phi_{j,m_j+1}^{(m_j-q+1)}(x) / \phi_{j,q}(x) \right) [q]_j = -\sum_{q=0}^{m_j-1} C_{m_j}^q \phi_{j,m_j+1}^{(m_j-q)}(x) f_i^{(q)}(x)$$

და,  $[m+1]_j$  სვეტში ლაიბნიცის ფორმულის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$[m_j+1]_j = \left[ \left( f_i(x) \phi_{j,m_j+1}(x) \right)^{(m_j)} \right]_{1 \leq i \leq N} = \left[ \sum_{q=0}^{m_j} C_{m_j}^q f_i^{(q)}(x) \phi_{j,m_j+1}^{(m_j-q)}(x) \right]_{1 \leq i \leq N} \rightarrow [m_j+1]_j = \left[ f_i^{(m_j)}(x) \phi_{j,m_j+1}(x) \right]_{1 \leq i \leq N}.$$

ამრიგად,  $[m_j+1]_j$  სვეტმა მიიღო (9) სახე და ლემა დამტკიცებულია. ■

**თეორემის დამტკიცება** (იხ. [44]). (2) მატრიცაში  $i$  ნომრის მქონე სტრიქონი,  $i = \overline{1, N}$ , აღვნიშნოთ  $\{i\}$ . სტრიქონს  $\{r_1+i\}$ ,  $i = \overline{1, N-r_1}$ , დავუმატოთ ჯამი  $\sum_{q=1}^{r_1} c_q \{q+i-1\}$ , რომლის კოეფიციენტები  $c_q \in F$  ჯერჯერობით არ არის განსაზღვრული. მივიღებთ:

$$(11) \quad \det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \det \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(x_1) & \dots & \tilde{w}_n(x_n) \\ \tilde{u}_1(x_1) & \dots & \tilde{u}_n(x_n) \end{bmatrix},$$

სადაც მატრიცა  $\tilde{w}_j(x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , მიიღება (3) მატრიციდან ბოლო  $N-r_1$  სტრიქონის ამოშლით, ხოლო მატრიცას  $\tilde{u}_j(x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , აქვს შემდეგი სახე:

$$(12) \quad \tilde{u}_j(x) = \left[ \left( x^{i-1} Q(x) \right)^{(k-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N-r_1 \\ 1 \leq k \leq r_j}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

აქ  $Q(x) = x^{r_1} + \sum_{q=1}^{r_1} c_q x^{q-1}$  არის  $r_1$  ხარისხის პოლინომი.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცა  $\tilde{w}_1(x) = V(x, r_1) \in M_{r_1}(F)$  არის  $\{f_i(x) = x^{i-1} | i = \overline{1, r_1}\}$  ფუნქციათა სისტემის ვრონსკიანი და ამიტომ გვაქვს

$$(13) \quad \det \tilde{w}_1(x) = \det V(x, r_1) = \prod_{k=0}^{r_1-1} k!.$$

შევარჩიოთ  $c_q \in F$ ,  $q = \overline{1, N-n}$ , კოეფიციენტები ისე, რომ  $Q(x)$  პოლინომს ჰქონდეს  $r_1$  ჯერადობის ფესვი წერტილში  $x = x_1$  (ეს შესაძლებელია ვიეტის თეორემის თანახმად). მაშინ

$$(14) \quad Q(x) = (x - x_1)^{r_1},$$

$$(15) \quad Q^{(k)}(x_1) = 0, \quad k = \overline{0, r_1-1},$$

და, ლაიბნიცის ფორმულის, (12) და (15) თანახმად, გვექნება  $\tilde{u}_1(x_1) = 0$ . შედეგად

$$\det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \det \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(x_1) & \tilde{w}_2(x_2) & \dots & \tilde{w}_n(x_n) \\ 0 & \tilde{u}_2(x_2) & \dots & \tilde{u}_n(x_n) \end{bmatrix},$$

საიდანაც, დეტერმინანტისათვის ლაპლასის თეორემის (იხ., მაგ., [59], გვ. 30, [123], გვ. 51) და (13) ფორმულის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$(16) \quad \det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \left( \prod_{k=0}^{r_1-1} k! \right) \det \tilde{U}.$$

(16) ფორმულაში შემავალი მატრიცა  $\tilde{U} = [\tilde{u}_2(x_2) | \dots | \tilde{u}_n(x_n)] \in M_{N-r_1}(F)$  ბლოკ-უჯრედოვანი სახისაა, ამასთან, მისი ბლოკები განისაზღვრება (12) ფორმულით. მაშასადამე,  $\tilde{U}$  აკმაყოფილებს 1 ლემის პირობებს, საიდანაც, (12) და (3) ფორმულების გათვალისწინებით, ვპოულობთ:

$$\det \tilde{U} = \det [\tilde{u}_2(x_2) | \dots | \tilde{u}_n(x_n)] = \det [w_2(x_2) | \dots | w_n(x_n)] \prod_{j=2}^n (Q(x_j))^{r_j}.$$

ამიტომ, (2) და (14) გათვალისწინებით, (16) გვაძლევს რეკურენტულ თანაფარდობას

$$(17) \quad \det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \left( \prod_{k=0}^{r_1-1} k! \right) \prod_{j=2}^n (x_j - x_1)^{r_1 r_j} \det V(x_2, r_2; \dots; x_n, r_n).$$

(17) და (13) ფორმულებიდან  $n$ -ით ინდუქციის გამოყენებით ვღებულობთ დასამტკიცებელ (5) თანაფარდობას. ■

### §3.2. ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა

ვთქვათ,  $\alpha_i, x_j$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) ნამდვილი რიცხვებია, ისეთი, რომ  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , როცა  $i \neq j$ . შემოვიღოთ აღნიშვნა (იხ. [44])

$$(18) \quad \alpha_{(n)} = \{\alpha_i | i = \overline{1, n}\}.$$

იქ სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, აღნიშნავთ  $\alpha_{(n)} = \alpha$ .

მონოგრაფიაში [42] (გვ. 372) მტკიცდება, რომ ვანდერმონდის განზოგადებული მატრიცა

$$(19) \quad \begin{aligned} [x_j^{\alpha_i}]_1^n &= V^{(G)}(x_1, \dots, x_n; \alpha) \equiv V^{(G)} \\ (0 < x_1 < \dots < x_n; \alpha_1 < \dots < \alpha_n) \end{aligned}$$

არის სავსებით დადებითი, ე.ი. ამ მატრიცის ყველა მინორი დადებითია.

**განმარტება 2. მატრიცას**

$$(20) \quad V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \alpha_{(N)}) \equiv V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \alpha_{(N)}) = [w_1^{(G)}(x_1) | w_2^{(G)}(x_2) | \dots | w_n^{(G)}(x_n)],$$

სადაც

$$(21) \quad \begin{aligned} w_j^{(G)}(x) &= \left[ (x^{\alpha_i})^{(k-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}} \\ (x \in \mathbb{R}^+, \alpha_i \in \mathbb{R}, r_j \in \mathbb{N}, N = \sum_{j=1}^n r_j, j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

ეუწოდოთ ვანდერმონდის განზოგადებული ( $r_1, \dots, r_n$ )-ჯერადი მატრიცა.

შრომაში [44] შემოღებული ეს მატრიცა არის 3.1 პარაგრაფში შესწავლილი ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის ბუნებრივი განზოგადება. ცხადია, რომ, როდესაც  $\alpha_i = i-1$ ,  $i = \overline{1, N}$ , გვაქვს  $V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \alpha) = V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n)$ , ხოლო როცა  $r_i = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ , მაშინ  $V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \alpha) = V^{(G)}(x_1, \dots, x_n; \alpha)$ .

**თეორემა 2. ვანდერმონდის განზოგადებული ( $r_1, \dots, r_n$ )-ჯერადი მატრიცა**

$$\begin{aligned} V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \alpha_{(N)}) &= [w_1^{(G)}(x_1) | w_2^{(G)}(x_2) | \dots | w_n^{(G)}(x_n)] \\ (0 < x_1 < \dots < x_n; \alpha_1 < \dots < \alpha_n) \end{aligned}$$

დადებითად არის განსაზღვრული.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ლემა (იხ. [44]):

**ლემა 2. ნებისმიერი მუდმივებისათვის  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , რომლებიც ერთდროულად არ უდრის ნულს და  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_k$ , როცა  $i \neq k$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ , ფუნქციას  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{i=1}^N c_i x^{\alpha_i}$  აქვს არაუმეტეს  $N-1$  დადებითი ნული (თუ ნულების რაოდენობას დავითვლით მათი ჯერადობის გათვალისწინებით), ე.ი.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{j=1}^n (x - x_j)^{r_j} \phi(x; \alpha_{(N)}), \\ \sum_{j=1}^n r_j &\leq N-1; \quad \phi(x; \alpha_{(N)}) \neq 0, \quad x > 0; \quad x_j > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

**ლემის დამტკიცება.** თუ ფუნქციას  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  აქვს მხოლოდ მარტივი ნულები, ანუ, თუ  $r_1 = \dots = r_n = 1$ , მაშინ  $n = N$  და 2 ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს უტოლობიდან  $\det V^{(G)} \neq 0$ , რომელიც დამტკიცებულია მონოგრაფიაში [42] (გვ. 372). მართლაც, ეს უტოლობა ნიშნავს, რომ, თუ  $f(x) = \sum_{i=1}^N c_i x^{\alpha_i}$  ფუნქციის ნულების რაოდენობა  $\geq N$ , მაშინ მუდმივები  $c_i$  აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, რომლის რანგი  $= N$  და, შედეგად,  $c_i = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

ვთქვათ, ლემა სამართლიანია, როდესაც  $1 \leq r_j \leq r$  ყველა  $j$  ნომრისათვის,  $j = \overline{1, n}$ , და დავამტკიცოთ, რომ ის სამართლიანია მაშინაც, როცა რომელიმე  $j'$  ნომრისათვის,  $1 \leq j' \leq n$ , გვექნება  $r_{j'} = r + 1$ .

დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, არსებობს ისეთი მუდმივები  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, რომ  $N$ -ხარისხოვან ჯამს აქვს  $N - 1$  ნულზე მეტი:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i x^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^n (x - x_j)^{r_j} \phi(x; \alpha_{(N)}),$$

$$\sum_{j=1}^n r_j \geq N; \quad 1 \leq r_j \leq r + 1, \quad x_j > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

გადავნიშნოთ  $f(x)$  ფუნქციის ნულები  $x_i$  ისე, რომ მათი ჯერადობა  $r_i$  არ იზრდებოდეს. აღვნიშნოთ  $m$  იმ ნულების რაოდენობა, რომელთა ჯერადობა  $r_i \geq 2$ ,  $1 \leq m \leq n$ . ამ აღნიშვნებში გვექნება

$$(22) \quad \sum_{j=1}^m r_j + n - m \geq N.$$

გაკეთებული დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია  $f(x)$  აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$(23) \quad f(x_j) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(24) \quad f'(x_j) = \dots = f^{(r_j-1)}(x_j) = 0, \quad 2 \leq r_j \leq r + 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

შემოვიღოთ (იხ. [44]) დამხმარე ფუნქცია  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(25) \quad \tilde{f}(x) = (f(x)x^{-\alpha_1})' = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{c}_i x^{\tilde{\alpha}_i}.$$

როლის თეორემის (იხ., მაგ., [97], n°111) თანახმად, (23) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია (25) ნულის ტოლი ხდება წერტილებში  $\xi_j$ ,  $0 < x_j < \xi_j < x_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , ე.ი.

$$\tilde{f}(\xi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

ამას გარდა, ლაიბნიცის ფორმულის და (23), (24) პირობების გათვალისწინებით, გვაქვს

$$\tilde{f}(x_j) = \tilde{f}'(x_j) = \dots = \tilde{f}^{(r_j-2)}(x_j) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

და, მაშასადამე,  $(N-1)$ -ხარისხოვან ჯამს (25) აქვს შემდეგი სახე:

$$(26) \quad \tilde{f}(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \xi_k) \prod_{j=1}^m (x - x_j)^{r_j-1} \tilde{\phi}(x; \tilde{\alpha}_{(N)}) = P_{\tilde{N}}(x) \tilde{\phi}(x; \tilde{\alpha}_{(N)}),$$

სადაც  $P_{\tilde{N}}(x)$  პოლინომის ყველა ფესვი დადებითია და აქვს ჯერადობები, რომლებიც  $\leq r$ .

ინდუქციური დაშვების ძალით,  $\tilde{f}(x)$  ფუნქციის დადებითი ნულების რაოდენობა  $< (N-1)$ . მეორეს მხრივ, (26) და (22) ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$\tilde{N} = \sum_{j=1}^m (r_j - 1) + n - 1 = \sum_{j=1}^m r_j - m + n - 1 \geq N - 1.$$

მივედით წინააღმდეგობამდე, ე.ი. ლემა სამართლიანია მაშინაც, როცა  $f$  ფუნქციის რომელიმე ნულის ჯერადობაა  $r_j = r + 1$ . ამით ლემის დამტკიცება ინდუქციით დასრულებულია. ■

**თეორემის დამტკიცება.** ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი მუდმივებისათვის  $r_j \in \mathbb{N}$ ,  $x_j > 0$ ,  $x_j \neq x_l$ , როცა  $j \neq l$ ,  $j, l = \overline{1, n}$ , და  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_k$ , როცა  $i \neq k$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ , სრულდება უტოლობა

$$(27) \quad \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \alpha_{(N)}) \neq 0.$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის ფუნქცია  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(28) \quad f(x; \alpha_{(N)}) = \det[\nu_1(x, x_1; r_1) | \nu_2(x, x_2; r_2) | \dots | \nu_n(x, x_n)],$$

სადაც მართკუთხა მატრიცებს  $\nu_2, \dots, \nu_n$  აქვს შემდეგი სახე:

$$(29) \quad v_j(x, r_j) = \left[ (x^{\alpha_i})^{(k-1)} \right]_{i=\overline{1, N}, k=\overline{1, r_j}}, \quad (j=\overline{2, n}, \sum_{j=1}^n r_j = N, x_j \in \mathbb{R}^+, \alpha_i \in \mathbb{R}),$$

ხოლო (28) დეტერმინანტის პირველ ბლოკში მდგარ  $v_1$  მატრიცას პირველ სვეტში აქვს  $x \in (0, \infty)$  ცვლადის ხარისხები  $x^{\alpha_i}$ ,  $i=\overline{1, N}$ , დანარჩენ სვეტებში კი – ამ ხარისხების წარმოებულები, გამოთვლილი ფიქსირებულ  $x_1 > 0$  წერტილში:

$$(30) \quad v_1(x, x_1; r_1) = \left[ x^{\alpha_i}, (x_1^{\alpha_i})', \dots, (x_1^{\alpha_i})^{(r_1-1)} \right]_{i=\overline{1, N}}.$$

(28)-(30) განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(31) \quad f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \Big|_{x=x_1} = \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)}).$$

გავშალოთ (28) დეტერმინანტი პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით. მივიღებთ

$$f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) = \sum_{i=1}^N c_i x^{\alpha_i},$$

სადაც კოეფიციენტები  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=\overline{1, N}$ , არის (28) დეტერმინანტში  $x^{\alpha_i}$  ელემენტის ალგებრული დამატება. ცხადია, ეს კოეფიციენტები დამოკიდებულია  $x_i, r_j, \alpha_i$  ( $j=\overline{1, n}, i=\overline{1, N}$ ) პარამეტრების მნიშვნელობებზე და არ არის დამოკიდებული  $x$  ცვლადზე:  $c_i = c_i(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)})$ . მაშასადამე, (28) აკმაყოფილებს 2 ლემის პირობებს და ამიტომ მისი ნულების რაოდენობა  $\leq N-1$ .

მეორეს მხრივ, ადვილი შესაძინებია, რომ (28) დეტერმინანტის  $k$ -ჯერ გაწარმოების შედეგად,  $k=\overline{1, r_1-1}$ , პირველ  $v_1(x, x_1; r_1)$  ბლოკში ორი სვეტი  $x=x_1$  წერტილში ხდება ერთნაირი და

$$(32) \quad f^{(k-1)}(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \Big|_{x=x_1} = 0, \quad k = \overline{2, r_1}.$$

გარდა ამისა, (28) განმარტების თანახმად,  $f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)})$  ფუნქციას აქვს  $r_j$  ჯერადობის ნულები წერტილებში  $x=x_j$ ,  $j=\overline{2, n}$ . თუ დავუშვებთ, რომ უტოლობა (27) მცდარია, ე.ი. არსებობს ისეთი მუდმივები  $r_j \in \mathbb{N}$ ,  $x_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $j=\overline{1, n}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=\overline{1, N}$ , რომელთათვისაც

$$(33) \quad \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)}) = f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \Big|_{x=x_1} = 0, \quad (x_j \neq x_l, j \neq l; \alpha_i \neq \alpha_k, i \neq k),$$

მივიღებთ, რომ, (32) და (33) ფორმულების თანახმად,  $x=x_1$  წერტილი არის  $f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)})$  ფუნქციის  $r_1$  ჯერადობის ნული; მაშინ  $f(x; \mathbf{\alpha}_{(N)})$  ფუნქციის ნულების რაოდენობა (მათი ჯერადობის გათვალისწინებით) არის

$$r_1 + \sum_{j=2}^n r_j = \sum_{j=1}^n r_j = N > N-1.$$

მიღებული წინააღმდეგობა გვიხვევებს, რომ (33) მცდარია, ე.ი. (27) ჭეშმარიტია.

კერძო შემთხვევაში, როდესაც  $\alpha_i = i-1$ ,  $i=\overline{1, N}$ , გვაქვს  $V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \mathbf{\alpha}) = V(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  და

$$(34) \quad \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \Big|_{\alpha_i=i-1} > 0 \quad (0 < x_1 < \dots < x_n).$$

მაგრამ  $\alpha_i$  მუდმივების ნებისმიერ  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  მნიშვნელობებზე გადასვლა შესაძლებელია მთელი  $\alpha_i = i-1$  მნიშვნელობების უწყვეტი ცვლილებით ისე, რომ შენარჩუნებულ იქნას უტოლობები მათ შორის. ვინაიდან დეტერმინანტი არის მატრიცის ელემენტების უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო, დამტკიცებული (27) უტოლობის ძალით, ის ვერსად ვერ გაუტოლდება ნულს, ვასკენით, რომ ყველა  $0 < x_1 < \dots < x_n$ ,  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  მნიშვნელობებისათვის დეტერმინანტი შეინარჩუნებს ნიშანს, რომელიც აქვს (34) უტოლობას.

ვინაიდან  $V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)})$  მატრიცის ნებისმიერი მთავარი მინორი არის ვანდერ-მონდის რომელიმე განზოგადებული  $(r_1, \dots, r_n)$ -ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტი, ყველა ასეთი მინორი არის დადებითი. ■

(27) უტოლობიდან გამომდინარეობს

**შედეგი 1.** ნებისმიერი მოცემული ერთმანეთისაგან განსხვავებული  $N$  მუდმივისათვის,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  ( $\alpha_i \neq \alpha_k$ , როცა  $i \neq k$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ ), ცალსახად მოიძებნება ისეთი  $N-1$  ნამდვილი მუდმივი  $c_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , და ფუნქცია

$$\phi: x \rightarrow \phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}), \quad \phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \in C^\infty,$$

რომელთათვისაც

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{N-1} c_i x^{\alpha_i} + x^{\alpha_N} = P_{N-1}(x) \phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}),$$

სადაც  $P_{N-1}(x)$  არის  $x \in \mathbb{R}$  ცვლადის  $N-1$  ხარისხის ნებისმიერი მოცემული პოლინომი, რომელსაც აქვს მხოლოდ დადებითი ფესვები (შესაძლოა, ჯერადიც) და  $\phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \neq 0$ , როცა  $x > 0$ .

**მართლაც,** აღვნიშნოთ მოცემული  $P_{N-1}(x)$  პოლინომის  $j$ -ური ფესვი  $x_j$  და ამ ფესვის ჯერადობა  $r_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . პირობის თანახმად, ყველა  $x_j > 0$  და

$$\sum_{j=1}^n r_j = N-1, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

წერტილებში  $x = x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , (35) ფორმულა გვაძლევს

$$(36) \quad \sum_{i=1}^{N-1} c_i (x_j^{\alpha_i})^{(k-1)} + (x_j^{\alpha_N})^{(k-1)} = 0, \\ (k = \overline{1, r_j}, \quad j = \overline{1, n})$$

განტოლებათა სისტემა (36) შეიცავს  $\sum_{j=1}^n r_j = N-1$  განტოლებას  $N-1$  უცნობისათვის  $c_i$  და ამ სისტემის მატრიცა არის  $V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)})$ . (27) უტოლობის ძალით, (36) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$c_i = c_i(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \neq 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

$c_i$  კოეფიციენტების ნაპოვნი მნიშვნელობების (35) ფორმულაში შეტანის შემდეგ ვიპოვიოთ

$$\phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) = (P_{N-1}(x))^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N-1} c_i x^{\alpha_i} + x^{\alpha_N} \right), \\ (x \neq x_j, \quad j = \overline{1, n})$$

ამასთან, ვინაიდან ამ შეფარდების მრიცხველსა და მნიშვნელს აქვს ერთნაირი ჯერადობის ნულები ერთსადიამავე წერტილებში  $x = x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , ფუნქცია  $\phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)})$  შეგვიძლია განვმარტოთ ისე, რომ  $\phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $x > 0$ . ■

შევნიშნოთ, რომ ეს წინადადება იძლევა ვიეტის თეორემის განზოგადებას, რამდენადაც განსაზღვრავს ხარისხოვანი ჯამის კოეფიციენტებს, თუ ცნობილია ამ ჯამის ყველა (დადებითი) ფესვი.

კერძოდ, როდესაც  $\alpha_i = \alpha_0 + i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , ვიეტის თეორემის თანახმად, მოიძებნება ისეთი კოეფიციენტები  $c_i$ , რომელთათვისაც

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i t^i + t^N = \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{r_p}, \quad \sum_{p=1}^n r_p = N,$$

და შედეგად, გვექნება

$$(37) \quad \phi(t; \mathbf{\alpha}_{(N)}) = \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{-r_p} \left( \sum_{i=1}^{N-1} c_i t^{\alpha_0+i} + t^{\alpha_0+N} \right) = t^{\alpha_0}, \quad \sum_{p=1}^n r_p = N.$$

ცხადია, რომ თუ აქ ავიღებთ  $\alpha_0 = 0$ , მაშინ  $\phi(x; \mathbf{\alpha}_{(N)}) = 1$ .

### §3.3. შემდგომი განზოგადებები და გამოყენებები

შრომაში [44] განვითარებული მეთოდების გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი  $V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)})$  მატრიცის შესწავლისას ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ შემთხვევით

$$(38) \quad 0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N.$$

**მართლაც**, ვთქვათ,  $n, N$  – მთელი რიცხვებია,  $1 \leq n \leq N$  და  $x_j > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\alpha_1 < \dots < \alpha_N$ . გამოვიყენოთ 1 ლემა, სადაც ავიღოთ

$$\phi_{jk}(x) = x^{\alpha_1}, \quad f_i(x) = x^{\alpha_i - \alpha_1}, \quad k = \overline{1, r_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}.$$

მაშინ (7) და (8) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვიან:

$$(39) \quad \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)}) = \left( \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_1 r_j} \right) \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; (\boldsymbol{\alpha} - \alpha_1)_{(N)}),$$

სადაც

$$(\boldsymbol{\alpha} - \alpha_1)_{(N)} \equiv \{\alpha_i - \alpha_1 \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_N, i = \overline{1, N}\}.$$

ცხადია,  $V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; (\boldsymbol{\alpha} - \alpha_1)_{(N)})$  მატრიცისათვის (38) პირობები შესრულებულია. ■

(20) ფორმულით შემოღებული ვანდერმონდის განზოგადებული  $(r_1, \dots, r_n)$ -ჯერადი მატრიცა განმარტებულია ნატურალური  $r_1, \dots, r_n$  რიცხვებისათვის. შრომაში [44] ნახვენებია, რომ შესაძლებელია მოიხსნას ამ რიცხვების დადებითობის მოთხოვნა.

**მართლაც**, ვთქვათ,  $|\alpha_i| \notin \mathbb{N}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . გავიტანოთ (27) დეტერმინანტის  $i$ -ური სტრიქონიდან მამრავლი

$$\frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} = \alpha_i(\alpha_i - 1) \dots (\alpha_i - q + 1) \neq 0, \quad q \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, N},$$

სადაც  $\Gamma(z) = (z-1)!$  ეილერის გამა-ფუნქციაა და გავითვალისწინოთ, რომ

$$(40) \quad (x^{\alpha_i})^{(k-1)} = \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - k + 2)} x^{\alpha_i - k + 1},$$

$$(40') \quad \frac{\Gamma(\alpha_i - q + 1)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} (x^{\alpha_i})^{(k-1)} = \frac{\Gamma(\alpha_i - q + 1)}{\Gamma(\alpha_i - k + 2)} x^{\alpha_i - k + 1} = (x^{\alpha_i - q})^{(k-q-1)}, \quad q = 1, 2, \dots$$

როგორც ცნობილია, (40), (40') ფორმულების გამოყენება დასაშვებია მაშინაც, როცა წარმოებულის რიგი უარყოფითი მთელია (იხ., მაგ., [127], გვ. 362-364):

$$(41) \quad (x^\alpha)^{(-q)} = \underbrace{\int_0^x dx \dots \int_0^x dx}_{q\text{-ჯერ}} x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-t)^{q-1} t^\alpha dt, \quad \alpha > -1, \quad x > 0, \quad q = 1, 2, \dots$$

და მაშინაც, როცა წარმოებულის რიგი არ არის მთელი [128], [129]. მართლაც, (41) ფორმულის მარჯვენა მხარეში  $t = xu$  ჩასმა და B-ინტეგრალისათვის ეილერის ფორმულის

$$(42) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (\alpha, \beta > 0)$$

გამოყენება გვაძლევს (40) ფორმულებს.

(27) დეტერმინანტში (40) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$(43) \quad \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \boldsymbol{\alpha}_{(N)}) = \left( \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} \right) \det \tilde{V}^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(N)}),$$

სადაც, (41) გათვალისწინებით (იმ შემთხვევაში, თუ  $\alpha_i - q > -1$ ,  $i = \overline{1, N}$ ),



$$\begin{aligned}
\tilde{V}^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; (\alpha - q)_{(N)}) &= [\tilde{w}_1^{(G)}(x_1) \mid \dots \mid \tilde{w}_n^{(G)}(x_n)], \\
\tilde{w}_j^{(G)}(x) &= \left[ (x^{\alpha_i - q})^{(k-q-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}} = \left[ v_j^{(G)}(x) \mid u_j^{(G)}(x) \right], \\
(44) \quad v_j^{(G)}(x) &= \left[ (x^{\alpha_i - q})^{(k-q-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq q}} = \left[ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-t)^{q-k} t^{\alpha_i - q} dt \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq q}}, \\
u_j^{(G)}(x) &= \left[ (x^{\alpha_i - q})^{(k-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j - q}},
\end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad (\alpha - q)_{(N)} \equiv \{\alpha_i - q \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_n, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad N = \sum_{j=1}^n r_j.$$

აქ, იმ  $j$  ნომრებისათვის,  $1 \leq j \leq n$ , რომელთათვისაც  $q \geq r_j$ , შესაბამისი ნომრის მქონე მატრიცა  $\tilde{w}_j^{(G)}$  შეიცავს მხოლოდ  $v_j^{(G)}$  ნაწილს:

$$(45) \quad \tilde{w}_j^{(G)}(x) = v_j^{(G)}(x) = \left[ (x^{\alpha_i - q})^{(k-q-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}} = \left[ (\Gamma(q))^{-1} \int_0^x (x-t)^{q-k} t^{\alpha_i - q} dt \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq r_j}}, \quad q \geq r_j, \quad \alpha_i - q > -1.$$

(43) ფორმულიდან ვპოულობთ:

$$\det \tilde{V}^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; (\alpha - q)_{(N)}) = \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i - q + 1)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \det V^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \alpha_{(N)}),$$

საიდანაც, აღნიშვნების შეცვლის შემდეგ, 2 თეორემის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
(46) \quad \det \tilde{V}^{(G)}(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n; \alpha_{(N)}) &= \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i + q + 1)} \det V^{(G)}(x_1, r_1 + q; \dots; x_n, r_n + q; (\alpha + q)_{(N)}) > 0, \\
r_j &= \pm 1, \pm 2, \dots, \quad r_j + q \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ [44],  $n=1$ ,  $N=r$ ,  $x > 0$ . ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$V^{(G)}(x, r; \alpha_{(r)}) = \left[ (x^{\alpha_i})^{(k-1)} \right]_1^r,$$

ე.ი.  $V^{(G)}(x, r; \alpha_{(r)})$  არის  $\{f_i(x) = x^{\alpha_i} \mid i = \overline{1, r}; x > 0\}$  ფუნქციათა სისტემის ვრონსკის მატრიცა. ამ მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა გვაძლევს:

$$(47) \quad \det V^{(G)}(x, r; \alpha_{(r)}) = x^\beta \prod_{1 \leq k < j \leq r} (\alpha_j - \alpha_k),$$

სადაც  $\beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i - r(r-1)/2$ . შევნიშნოთ, რომ (47) აზოგადებს (13) თანაფარდობას.

(47) გამოყენებით ვპოულობთ ისეთ  $c_i$  კოეფიციენტებს და  $\phi(x; \alpha_{(r)})$  ფუნქციას, რომ

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i x^{\alpha_i} + x^{\alpha_N} = (x - x_1)^{N-1} \phi(x; \alpha_{(N)}).$$

მართლაც, (47) გათვალისწინებით, კრამერის ფორმულები გვაძლევს

$$c_i = -x_1^{\alpha_N - \alpha_i} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}), \quad i = \overline{1, N-1},$$

საიდანაც, 2 თეორემის შედეგის გათვალისწინებით,

$$(48) \quad \phi(x; \alpha_{(N)}) = (x - x_1)^{-N+1} x_1^{\alpha_N} \left( (x/x_1)^{\alpha_N} - \sum_{i=1}^{N-1} (x/x_1)^{\alpha_i} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) \right) \neq 0, \quad x > 0.$$

აქ  $L_i(\alpha, \alpha_{(N-1)})$  აღნიშნავს ლაგრანჟის ელემენტარულ ინტერპოლაციურ პოლინომს [126]:

$$L_i(\alpha, \alpha_{(N-1)}) = \prod_{p=1}^{N-1} (\alpha - \alpha_p) / (\alpha_i - \alpha_p), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ წერტილში  $x = x_1 > 0$  გვაქვს

$$(49) \quad \phi(x_1; \alpha_{(N)}) = \frac{x_1^{\alpha_N}}{(N-1)!} \left( \frac{\Gamma(\alpha_N + 1)}{\Gamma(\alpha_N - N + 2)} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - N + 2)} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) \right).$$

**მაგალითი 2.** ვთქვათ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $q \leq \min\{r_j | r_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n}\}$ ,  $q < \alpha_1 < \dots < \alpha_N$ ,  $x_j > 0$ . (43) ფორმულის მარჯვენა მხარის დეტერმინანტში ინტეგრალების შემცველი სვეტები გადავიტანოთ მარჯვნივ და გამოვიყენოთ 2 თეორემის შედეგი. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ გვექნება [44]:

$$(50) \quad \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)}) =$$

$$= (-1)^{\sigma_1} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} \det \begin{bmatrix} V^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(N-nq)}) & * \\ & 0 \\ & & A \end{bmatrix}_{i,j=\overline{1, N}} =$$

$$= (-1)^{\sigma_1} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} \det V^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(N-nq)}) \det A,$$

სადაც აღნიშნულია

$$\sigma_1 = q \sum_{j=1}^n j(r_j - q), \quad A = [A^\dagger(x_1) | \dots | A^\dagger(x_n)] \in M_{nq, nq}(\mathbb{R}),$$

ხოლო  $A^{(j)}(x) \in M_{nq, q}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , არის შემდეგი სახის მართკუთხა მატრიცა:

$$A^{(j)}(x) = \left[ \left( x_j^{\alpha_{\tilde{N}+i}-q} + \sum_{p=1}^{\tilde{N}} c_{ip} x_j^{\alpha_{i+p}-q} \right)^{(-q+k-1)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}} = \left[ \int_0^{x_j} \phi_i(t; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{r_p - q} (x_j - t)^{q-k} dt \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}, \quad r_0 > 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N).$$

აქ

$$\tilde{N} = N - nq + 1,$$

ხოლო კოეფიციენტები  $c_{ip}$  და ფუნქციები  $\phi_i(t; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) \neq 0$ ,  $t > 0$ ,  $i = \overline{1, nq}$ , განსაზღვრულია (35) ფორმულის შესაბამისად.

$A^{(j)}(x_j)$  მატრიცის  $k$  ნომრის მქონე სვეტს გამოვაკლოთ  $A^{(j-1)}(x_{j-1})$  მატრიცის იგივე  $k$  ნომრის მქონე სვეტი,  $j = n, n-1, \dots, 2$ . გვექნება

$$A^{(j)}(x_j) \rightarrow \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - t)^{q-k} \phi_i(t; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{r_p - q} dt \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}} =$$

$$= \left[ \int_{x_{j-1}/x_j}^1 (-1)^{r_j - q} (1-u)^{r_j - k} \phi_i(ux_j; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x_j^{r_j - k + 1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (ux_j - x_p)^{r_p - q} du \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}.$$

შედეგად, მარტივი გარდაქმნების გამოყენებით (იხ. [44]), (50) გამოსახულებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$(51) \quad \frac{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)})}{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - q; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(N-nq)})} =$$

$$= (-1)^{\tilde{\sigma}_1} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} \prod_{j=1}^n \left( x_j^{r_j q} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x_j - x_p)^{r_p q - q^2} \right) \det [B^{(1)}(x_1) | \dots | B^{(n)}(x_n)],$$

სადაც

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 + q(N - nq) = q \left( \sum_{j=1}^n j(r_j - q) + N - nq \right) = q \sum_{j=1}^n (j+1)(r_j - q)$$

და

$$(52) \quad B^{(j)}(x_j) = [b_{ik}^{(j)}(x_j)]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}} = \left[ x_j^{1-k} \int_{x_{j-1}/x_j}^1 (1-u)^{r_j - k} \phi_i(ux_j; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n \left( \frac{ux_j - x_p}{x_j - x_p} \right)^{r_p - q} du \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}, \quad r_0 > 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N).$$

$V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)})$  მატრიცის დაყვანა (50) საფეხურებიან სახეზე შესაძლებელია სხვა ხერხითაც. (43) ფორმულის მარჯვენა მხარის დეტერმინანტში გადავიტანოთ მარჯვნივ  $k = \overline{r_j - q, r_j - 1}$  რიგის წარმოებულების შემცველი სვეტები. 2 თეორემის შედეგის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(50') \quad \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}_{(N)}) = (-1)^{\sigma_2} \det \begin{bmatrix} V^{(G)}(x_1, r_1 - q; \dots; x_n, r_n - q; \boldsymbol{\alpha}_{(N-nq)}) & * \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}_{i, j = \overline{1, N}},$$

სადაც

$$(53) \quad \sigma_2 = q \sum_{j=1}^n (j-1)(r_j - q) = \tilde{\sigma}_1 - 2q \sum_{j=1}^n (r_j - q),$$

ხოლო მატრიცა  $\tilde{A} = [\tilde{A}^{(1)}(x_1) \dots \tilde{A}^{(n)}(x_n)] \in M_{nq, nq}(\mathbb{R})$  გამოსახება მართკუთხა მატრიცებით

$$\tilde{A}^{(j)}(x_j) = [a_{ik}^{(j)}(x_j)]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}} = \left[ \left( \tilde{\phi}_i(x; \boldsymbol{\alpha}_{(\tilde{N})}) \prod_{p=1}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}^{(k+r_j-q-1)} \quad (j = \overline{1, n}).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ აქ, 2 თეორემის შედეგის შესაბამისად,

$$(54) \quad \tilde{\phi}_i(x; \boldsymbol{\alpha}_{(\tilde{N})}) = x^q \left( x^{\alpha_{\tilde{N}+i} - q} + \sum_{p=1}^{\tilde{N}-1} c_{ip} x^{\alpha_{i+p} - q} \right) \prod_{p=1}^n (x - x_p)^{q-r_p} = x^q \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}).$$

(54) ფორმულის გათვალისწინებით გავამარტივოთ  $\tilde{A}^{(j)}$  მატრიცის  $a_{ik}^{(j)}$  ელემენტები:

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(j)}(x_j) &= \left( \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j} \right)^{(r_j - q)} \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{r_j - q} C_{r_j - q}^m \left( \left( (x - x_j)^{r_j - q} \right)^{(r_j - q - m)} \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j} \right)^{(m)} \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{r_j - q} C_{r_j - q}^m \left( \frac{(r_j - q)!}{m!} (x - x_j)^m \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j} \right)^{(m)} \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{r_j - q} C_{r_j - q}^m \frac{(r_j - q)!}{m!} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \left( (x - x_j)^m \right)^{(l)} \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j}^{(m+k-l-1)} = \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \sum_{m=0}^{r_j - q} \frac{(r_j - q)!}{(m-l)!} C_{r_j - q}^m \delta_{ml} \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j}^{(m+k-l-1)} = \\ &= \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} \sum_{l=0}^{k-1} (r_j - q)! C_{r_j - q}^l C_{k-1}^l \end{aligned}$$

(აქ  $\delta_{ml}$  აღნიშნავს კრონეკერის სიმბოლოს). უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარე გავამარტივოთ ცნობილი ფორმულის (იხ., მაგ., [130], 0.156.1)

$$\sum_{l=0}^p C_n^l C_m^{p-l} = C_{n+m}^p$$

გამოყენებით, რომელშიდაც ავიღოთ  $p = m = k - 1$ ,  $n = r_j - q$ . ბინომიალური კოეფიციენტების სიმეტრიის გათვალისწინებით გვექნება

$$(55) \quad \begin{aligned} a_{ik}^{(j)}(x_j) &= \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} (r_j - q)! C_{r_j - q + k - 1}^{k-1} = \\ &= \left( \phi_i(x; (\boldsymbol{\alpha} - q)_{(\tilde{N})}) x^q \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x - x_p)^{r_p - q} \right) \Big|_{x=x_j}^{(k-1)} (r_j - q + k - 1)! / (k - 1)!. \end{aligned}$$

(55) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა  $\tilde{A} = [\tilde{A}^{(1)}(x_1) | \dots | \tilde{A}^{(n)}(x_n)]$  აკმაყოფილებს 3.1 ლემის პირობებს, ამიტომ (8) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$(56) \quad \det \tilde{A} = \det [\tilde{A}^{(1)}(x_1) | \dots | \tilde{A}^{(n)}(x_n)] = \det \Phi \prod_{j=1}^n \left( x_j^{q^2} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x_j - x_p)^{r_p q - q^2} \prod_{k=1}^q (r_j - q + k - 1)! / (k - 1)! \right),$$

სადაც

$$(57) \quad \Phi = [\Phi_1 | \dots | \Phi_n]_1^{nq},$$

$$\Phi_j = [\phi_i^{(k-1)}(x_j; (\alpha - q)_{(\tilde{N})})]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

შედგებად, (50') ფორმულიდან ვპოულობთ:

$$(58) \quad \frac{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; \alpha_{(N)})}{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{q}; \alpha_{(N-nq)})} = (-1)^{\sigma_2} \det \tilde{A} =$$

$$= (-1)^{\sigma_2} \det \Phi \prod_{j=1}^n \left( x_j^{q^2} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (x_j - x_p)^{r_p q - q^2} \prod_{k=1}^q \frac{(r_j - q + k - 1)!}{(k - 1)!} \right).$$

(51) და (58) ფორმულებიდან, (53) და (56) ფორმულების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(59) \quad \frac{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{q}; \alpha_{(N-nq)})}{\det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{q}; (\alpha - q)_{(N-nq)})} = (-1)^{\tilde{\sigma}_1 - \sigma_2} \frac{\det A}{\det \tilde{A}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} =$$

$$= \frac{\det B}{\det \Phi} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i - q + 1)} \prod_{j=1}^n \left( x_j^{r_j q - q^2} \prod_{k=1}^q \frac{(k - 1)!}{(r_j - q + k - 1)!} \right)$$

(59) გამოსახულების მაცხენა მხარეს მდგარი შეფარდების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (39) ფორმულით. მივიღებთ

$$(60) \quad \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{q}; \alpha_{(N-nq)}) = \det V^{(G)}(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{q}; (\alpha - q)_{(N-nq)}) \prod_{j=1}^n x_j^{r_j q - q^2}$$

და (59) ფორმულაში შეტანის შემდეგ, (57) გათვალისწინებით, გვექნება:

$$(61) \quad \det [B^{(1)}(x_1) | \dots | B^{(n)}(x_n)]_1^{nq} = \det [\Phi_1 | \dots | \Phi_n]_1^{nq} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i - q + 1)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^q \frac{\Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k)}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, x_0 = 0, r_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n}, r_0 > 0, \sum_{j=1}^n r_j = N).$$

აქ მატრიცები  $\Phi$  და  $\Phi_j, j = \overline{1, n}$ , განსაზღვრულია (57) ფორმულით.

მოსახერხებელია (61) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი მამრავლი წარმოვადგინოთ სხვა ექვივალენტური სახით. თანამამრავლთა გადაჯგუფება გვაძლევს:

$$(62) \quad \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_i - q + 1)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^q \frac{\Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^q \left( \frac{\Gamma(\alpha_k - q + 1)}{\Gamma(k)} \prod_{j=1}^n \Gamma(r_j - q + k) \right) \frac{\prod_{k=q+1}^N \Gamma(\alpha_k - q + 1)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\alpha_i + 1)} =$$

$$= \prod_{k=1}^q \left( \frac{\Gamma(\alpha_k - q + 1)}{\Gamma(k)} \prod_{j=1}^n \Gamma(r_j - q + k) \right) \frac{\prod_{k=1}^{N-q} \Gamma(\alpha_{k+q} - q + 1)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\alpha_i + 1)} =$$

$$= \prod_{k=1}^q \left( \frac{\Gamma(\alpha_k - q + 1)}{\Gamma(k)} \prod_{j=1}^n \Gamma(r_j - q + k) \right) \frac{\prod_{k=1}^{N-q} \Gamma(\alpha_{k+q} - q + 1)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(\alpha_i + 1) \prod_{i=1}^{N-q} \Gamma(\alpha_{i+q} + 1)} =$$

$$= \prod_{k=1}^q \left( \frac{\Gamma(\alpha_k - q + 1)}{\Gamma(k) \Gamma(\alpha_k + 1)} \prod_{j=1}^n \Gamma(r_j - q + k) \right) \prod_{k=1}^{N-q} \frac{\Gamma(\alpha_{k+q} - q + 1)}{\Gamma(\alpha_{k+q} + 1)}.$$

(62) ფორმულის მარჯვენა მხარე გვიჩვენებს, რომ განსაკუთრებით საინტერესოა შემთხვევა, როცა  $\alpha_k = r_0 + k - 1, r_0 \geq 0, i = \overline{1, N}$ . მაშინ

$$\phi_i(t; (\alpha - q)_{(N-nq+1)}) = \left( \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{r_p - q} \right)^{-1} \left( \sum_{p=1}^{N-nq} c_p t^{p-1} + t^{N-nq} \right) t^{r_0+i-1-q} = t^{r_0+i-1-q}, \quad i = \overline{1, nq},$$

და, 1 ლემის და (57) ფორმულის გათვალისწინებით,

$$(63) \quad \det[\Phi_1 | \dots | \Phi_2]_1^{nq} = \det V(x_1, \dots, x_n; q) \prod_{j=1}^n x_j^{r_0 q - q^2},$$

სადაც  $V(x_1, \dots, x_n; q)$  აღნიშნავს ვანდერმონდის  $q$ -ჯერად მატრიცას (იხ. განმარტება 2).

შედგებად (61), (62) და (63) ფორმულებიდან ვპოულობთ:

$$(64) \quad \begin{aligned} \frac{\det[\mathbf{b}^{(1)}(x_1) | \dots | \mathbf{b}^{(n)}(x_n)]_1^{nq}}{\det V(x_1, \dots, x_n; q) \prod_{j=1}^n x_j^{r_0 q - q^2}} &= \prod_{k=1}^q \left( \frac{\Gamma(r_0 + k - q)}{\Gamma(k) \Gamma(r_0 + k)} \prod_{j=1}^n \Gamma(r_j - q + k) \right) \frac{\prod_{k=1}^{N-q} \Gamma(r_0 + k)}{\prod_{k=1}^{N-q} \Gamma(r_0 + k + q)} = \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{N-q} \Gamma(r_0 + k)}{\prod_{k=1}^N \Gamma(r_0 + k)} \prod_{k=1}^q \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k)} = \frac{\prod_{k=1}^q \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k) / \Gamma(k)}{\prod_{k=N-q+1}^N \Gamma(r_0 + k)} = \\ &= \frac{\prod_{k=1}^q \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k) / \Gamma(k)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(k + r_0 + N - q)} = \prod_{k=1}^q \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k) \Gamma(k + r_0 + N - q)} \end{aligned}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}, \quad r_0 \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N),$$

სადაც აღნიშნულია

$$(65) \quad \mathbf{b}^{(j)}(x_j) = \left[ x_j^{i-k} \int_{x_{j-1}/x_j}^1 u^{i-1} (1-u)^{r_j-k} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \left( \frac{u x_j - x_p}{x_j - x_p} \right)^{r_p - q} du \right]_{\substack{1 \leq i \leq nq \\ 1 \leq k \leq q}}.$$

(52) და (5') ფორმულების გათვალისწინებით (64) ფორმულის მარცხენა მხარის გამარტივება გვაძლევს თანაფარდობას

$$(66) \quad \begin{aligned} \det[\mathbf{b}^{(1)}(x_1) | \dots | \mathbf{b}^{(n)}(x_n)]_1^{nq} &= \prod_{k=1}^q \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k) \Gamma(k + r_0 + N - q)} \det V(x_1, \dots, x_n; q) = \\ &= \prod_{k=1}^q \frac{(\Gamma(k))^{n-1} \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j - q + k)}{\Gamma(k + r_0 + N - q)} \prod_{1 \leq i < l \leq n} (x_l - x_i)^{q^2} \end{aligned}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}, \quad r_0 \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N).$$

მორე საინტერესო შემთხვევა გვაქვს, როცა  $q=1$ . მაშინ  $\tilde{N} = N - n + 1$ , (52) და (57) მართკუთხა მატრიცები  $B^{(j)}(x_j)$  და  $\Phi_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , შეიცავს მხოლოდ თითო სვეტს და (61) და (62) ფორმულებიდან ვპოულობთ თანაფარდობას [44]:

$$(67) \quad \frac{\det \left[ \int_{x_{j-1}/x_j}^1 (1-u)^{r_j-1} \phi_i(ux_j; (\alpha-1)_{(N-n+1)}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n \left( \frac{u x_j - x_p}{x_j - x_p} \right)^{r_p-1} du \right]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}}{\det[\phi_i(x_j; (\alpha-1)_{(N-n+1)})]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}} = \frac{\prod_{j=1}^n (r_j - 1)!}{\prod_{i=1}^N \alpha_i}$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}, \quad r_0 \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N).$$

კერძოდ, თუ აქ ავიღებთ  $\alpha_i = r_0 - 1 + i$ ,  $r_0 \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , მაშინ, (37) თანაფარდობის შესაბამისად,

$$\phi_i(t; (\alpha-1)_{(N-n+1)}) = \left( \prod_{p=1}^n (t - x_p)^{r_p-1} \right)^{-1} \left( \sum_{p=1}^{N-n} c_p t^{p-1} + t^{N-n} \right) t^{r_0+i-2} = t^{r_0+i-2}, \quad i = \overline{1, n},$$

და (67) ფორმულაში შეტანისა და გამარტივებების შედეგად მივიღებთ:

$$(68) \quad \det \left[ x_j^{i-1} \int_{x_{j-1}/x_j}^1 u^{i-1} (1-u)^{r_j-1} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \left( \frac{ux_j - x_p}{x_j - x_p} \right)^{r_p-1} du \right]_1^n = \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right)} \det V$$

$$(0 < x_{j-1} < x_j, \quad x_0 = 0, \quad r_j \in \mathbb{N}, \quad j, i = \overline{1, n}, \quad r_0 \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = N),$$

სადაც  $V$  აღნიშნავს ვანდერმონდის მატრიცას და გათვალისწინებულია, რომ განსახილველ შემთხვევაში

$$\prod_{i=1}^N \alpha_i = \prod_{i=1}^N (r_0 - 1 + i) = \frac{\Gamma(r_0 + N)}{\Gamma(r_0)} = \frac{\Gamma\left(r_0 + \sum_{j=1}^n r_j\right)}{\Gamma(r_0)}.$$

შევნიშნოთ, რომ იგივე (68) თანაფარდობა გამომდინარეობს (65)-(66) ფორმულებიდან, თუ ამ ფორმულებში ავიღებთ  $q = k = 1$ .

მიღებული თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

**შედეგი 2.** (67) ფორმულაში ავიღოთ  $n=1$ ,  $N = \tilde{N} = r_1 \geq 2$ . ამ შემთხვევაში (48) და (49) გვაძლევს

$$\phi(ux_1; (\alpha-1)_{(N)}) = (u-1)^{-N+1} x_1^{\alpha_N - N} \left( u^{\alpha_N - 1} - \sum_{i=1}^{N-1} u^{\alpha_i - 1} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) \right),$$

$$\phi(x_1; (\alpha-1)_{(N)}) = \frac{x_1^{\alpha_N - N}}{(N-1)!} \left( \frac{\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_N - N + 1)} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i - N + 1)} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) \right)$$

და (67) ფორმულაში შეტანისა და ინტეგრების შემდეგ ვპოულობთ [44]:

$$(69) \quad (-1)^N \left( \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^{-1} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) - \alpha_N^{-1} \right) \prod_{i=1}^N \alpha_i = \left( \frac{\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_N - N + 1)} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i - N + 1)} L_i(\alpha_N, \alpha_{(N-1)}) \right).$$

უკანასკნელ ფორმულაში წევრების გადაჯგუფება და აღნიშვნების შეცვლა იძლევა იგივეობას ლაგრანჟის ინტერპოლაციური პოლინომების შემცველი სასრული ჯამისათვის:

$$(70) \quad \sum_{i=1}^N \left( x \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \alpha_k + (-1)^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i - N)} \right) L_i(x) = \prod_{k=1}^N \alpha_k + (-1)^{N-1} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x - N)},$$

ანუ

$$(70') \quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{x}{\alpha_i} + \frac{(-1)^{N-1} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i - N) \prod_{k=1}^N \alpha_k} \right) L_i(x) = 1 + \frac{(-1)^{N-1} \Gamma(x)}{\Gamma(x - N) \prod_{k=1}^N \alpha_k},$$

სადაც

$$L_i(x, \alpha_{(N)}) = \prod_{p=1}^N (x - \alpha_p) / (\alpha_i - \alpha_p), \quad i = \overline{1, N}, \quad N = 2, 3, \dots,$$

$$L_i(x, \alpha_{(N)}) = L_1(x, \alpha_{(1)}) = 1, \quad N = 1.$$

როცა  $N$  არ არის დიდი, ადვილია (70') ფორმულის პირდაპირი შემოწმება. მაგალითად,  $N=1$  შემთხვევაში (70') დაიყვანება მარტივ იგივეობაზე

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha \Gamma(\alpha - 1)} = 1 + \frac{\Gamma(x)}{\alpha \Gamma(x - 1)}.$$

შევნიშნოთ, რომ შეფარდებები  $\Gamma(x)/\Gamma(x-N) = x(x-1)\dots(x-N)$  ანალიზურია  $x$  ცვლადის ნებისმიერი კომპლექსური (სასრული) მნიშვნელობისათვის. ამიტომ, თანახმად თეორემისა ანალიზური გაგრძელების შესახებ, (70') იგივეობა მართებულია  $x$  ცვლადის და  $\alpha_i$  პარამეტრების,  $i = \overline{1, N}$ , ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის (და არა მხოლოდ ამ იგივეობის გამოყვანისას გამოყენებული პირობების  $x, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 < \dots < \alpha_N < x$ , შესრულებისას).

### §3.4. განდერმონდის ასოციირებული და ინდუცირებული მატრიცები და მათი განზოგადებები

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი  $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$  მატრიცისათვის და მთელი  $r$  რიცხვისათვის,  $1 \leq r \leq \min(m,n)$ , განიმარტება (იხ., მაგ., [42], გვ. 30)  $r$ -ასოციირებული მატრიცა  $\mathfrak{A}_r(A) = [a_{\alpha\beta}]$ , რომლის ელემენტებია  $A$  მატრიცის  $r$  რიგის მინორები, გადანომრილი ე.წ. ლექსიკოგრაფული თანმიმდევრობით:

$$(71) \quad a_{\alpha\beta} = \det(A[\alpha|\beta]), \quad \alpha \in \mathcal{Q}_{r,m}, \quad \beta \in \mathcal{Q}_{r,n}.$$

აქ და შემდგომში სიმბოლო  $\mathcal{Q}_{r,n}$  აღნიშნავს სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა მკაცრად ზრდადი  $\omega = (\omega_1 < \dots < \omega_r)$   $r$ -მიმდევრობისგან,  $\omega_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $1 \leq i \leq r$  (იხ., მაგ., [56], გვ. 9):

$$\mathcal{Q}_{r,n} = \{\omega \mid \omega = (\omega_1 < \dots < \omega_r), 1 \leq \omega_i \leq n, 1 \leq i \leq r\}.$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  და  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$  მიმდევრობების,  $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}_{r,n}$ , ლექსიკოგრაფული თანმიმდევრობით დალაგებისას ითვლება (იხ., მაგ., [59], გვ. 241), რომ

$$\alpha < \beta, \quad \text{თუ} \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k, \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

მატრიცა  $A[\alpha|\beta]$  შედგება  $A$  მატრიცის იმ ელემენტებისგან, რომლებიც დგას  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  ნომრების მქონე სტრიქონებისა და  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$  ნომრების მქონე სვეტების გადაკვეთაზე. შემდგომში  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  და  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$  ხშირად ვუწოდებთ  $r$ -მულტი-ინდექსებს, ან, უბრალოდ, მულტიინდექსებს. ცხადია, სიმრავლე  $\mathcal{Q}_{r,n}$  შეიცავს  $C_n^r$  ელემენტს, ე.ი.  $r$ -ასოციირებული  $\mathfrak{A}_r(A)$  მატრიცის ზომებია  $C_m^r \times C_n^r$ .

სილვესტრ-ფრანკის თეორემის თანახმად (იხ., მაგ., [56], 2.7.2, გვ. 31), ნებისმიერი კვადრატული  $A \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$(72) \quad \det \mathfrak{A}_r(A) = (\det A)^{C_n^{r-1}}.$$

ნებისმიერი კვადრატული  $A \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცისათვის დეტერმინანტის გარდა განიმარტება სკალარული ფუნქცია  $\text{per} A$ , რომელსაც ეწოდება  $A = [a_{jk}]_1^n$  მატრიცის პერმანენტი:

$$(73) \quad \text{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

შედარებისათვის აქვე მოვიყვანოთ  $A$  მატრიცის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$(73') \quad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n (-1)^\sigma a_{\sigma(i), i}.$$

პერმანენტების ძირითადი თვისებების მიმოხილვა იხ., მაგ., მონოგრაფიაში [57].

პერმანენტის ცნების გამოყენებით ნებისმიერი  $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$  მატრიცისათვის და მთელი  $r$  რიცხვისათვის,  $1 \leq r \leq n$ , განიმარტება (იხ., მაგ., [56], გვ. 35)  $r$ -ინდუცირებული მატრიცა  $\mathfrak{P}_r(A) = [p_{\alpha\beta}]$ , რომლის ელემენტები დაკავშირებულია  $A$  მატრიცის  $r$  რიგის პერმანენტებთან თანაფარდობით:

$$(74) \quad p_{\alpha\beta} = \text{per}(A[\alpha|\beta]) / \sqrt{\rho(\alpha)\rho(\beta)}, \quad \alpha \in G_{r,m}, \quad \beta \in G_{r,n}.$$

აქ  $G_{r,n}$  აღნიშნავს სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა არაკლებადი  $\omega = (\omega_1 \leq \dots \leq \omega_r)$   $r$ -მიმდევრობისგან,  $\omega_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $1 \leq i \leq r$  (იხ., მაგ., [56], გვ. 9):

$$G_{r,n} = \{\omega \mid \omega = (\omega_1 \leq \dots \leq \omega_r), \quad 1 \leq \omega_i \leq n, \quad 1 \leq i \leq r\},$$

ხოლო  $\rho(\omega)$  აღნიშნავს  $\omega \in G_{r,n}$  მიმდევრობაში შემავალი (სხვადასხვა) რიცხვების ჯერადობების ფაქტორიალების ნამრავლს. შევნიშნოთ, რომ ამ აღნიშვნებში ფორმულა (5) ჩაიწერება უფრო მარტივად:

$$\det V(x_1, r_1; \dots; x_n, r_n) = \rho(\mathbf{x}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^{r_i r_j}.$$

სიმრავლე  $G_{r,n}$  შეიცავს  $C_{n+r-1}^r$  ელემენტს, ე.ი. თუ  $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ , მაშინ  $r$ -ინდუცირებული  $\mathfrak{F}_r(A)$  მატრიცის ზომებია  $C_{m+r-1}^r \times C_{n+r-1}^r$ .

მაგალითად, თუ  $n=2$ ,  $A \in M_2(\mathbb{F})$  და  $r=2$ , მაშინ  $C_{n+r-1}^r = 3$  და

$$\mathfrak{F}_r(A) = \begin{bmatrix} 2^{-1} \text{per}(A[1,1|1,1]) & 2^{-1/2} \text{per}(A[1,1|1,2]) & 2^{-1} \text{per}(A[1,1|2,2]) \\ 2^{-1/2} \text{per}(A[1,2|1,1]) & \text{per}(A[1,2|1,2]) & 2^{-1/2} \text{per}(A[1,2|2,2]) \\ 2^{-1} \text{per}(A[2,2|1,1]) & 2^{-1/2} \text{per}(A[2,2|1,2]) & 2^{-1} \text{per}(A[2,2|2,2]) \end{bmatrix}.$$

$r$ -ინდუცირებული  $\mathfrak{F}_r(A)$  მატრიცის ზოგიერთი თვისება იხ., მაგალითად, მიმოხილვაში [56] (2.12.1-2.12.7, გვ. 35). კერძოდ,  $\mathfrak{F}_r(A)$  მატრიცისათვის სამართლიანია სილვესტრ-ფრანკეს თეორემის ანალოგი:

$$(75) \quad \det \mathfrak{F}_r(A) = (\det A)^{C_{n+r-1}^{r-1}}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ  $A \in M_{r,n}(\mathbb{F})$  ( $1 \leq r \leq n$ ), მაშინ  $r$ -ასოცირებული მატრიცა  $\mathfrak{A}_r(A)$  წარმოადგენს  $A$  მატრიცის ვექტორ-სტრიქონების სრულიად ანტისიმეტრიულ (გრასმანის) ნამრავლს:

$$(76) \quad \mathfrak{A}_r(A) = A_1 \wedge \dots \wedge A_r, \quad A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad i = \overline{1, r} \quad (1 \leq r \leq n),$$

ხოლო  $r$ -ინდუცირებული მატრიცა  $\mathfrak{F}_r(A)$  წარმოადგენს  $A_1, \dots, A_r$  ვექტორ-სტრიქონების სრულიად სიმეტრიულ ნამრავლს:

$$(77) \quad \mathfrak{F}_r(A) = \left\{ \rho^{-1/2}(\alpha) \text{per}(A[1, \dots, r | \alpha]) \mid \alpha \in G_{r,n} \right\}.$$

ნაშრომში [67] შემოღებულია  $A$  მატრიცის  $r$ -ინდუცირებული  $\mathfrak{F}'_r(A)$  მატრიცის ცნება.

ვთქვათ,  $n \geq 1$ ,  $A \in M_n(\mathbb{F})$  და  $\omega = (1 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_r \leq n - r + 1) \in G_{r, n-r+1}$ ,  $1 \leq r \leq n$ .  $r$ -მიმდევრობას ვუწოდოთ  $\omega'$ ,  $\omega' = (1 \leq \omega'_1 < \dots < \omega'_r \leq n) \in Q_{r,n}$ , თუ  $\omega'_i = \omega_i + i - 1$ ,  $1 \leq i \leq r$ . მოვაწესრიგოთ სიმრავლე  $G_{r, n-r+1}$ , მაგალითად, გადავნიშნოთ ლექსიკოგრაფულად ყველა  $r$ -მიმდევრობა  $\omega^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}$ ,  $\alpha = \overline{1, C_n^r}$ . მაშინ სიმრავლე  $Q_{r,n} = \{ \omega^{(\alpha)} \mid 1 \leq \alpha \leq C_n^r \}$  აგრეთვე იქნება მოწესრიგებული.

**განმარტება 3.** მოცემული  $A \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცისა და  $\omega^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}$   $r$ -მიმდევრობების მოცემული ნუმერაციისათვის ავადოთ  $C_n^r$  რიგის მატრიცა  $\mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) = [\mathfrak{p}'_{\alpha\beta}]$ , რომლის ელემენტებია

$$(78) \quad \mathfrak{p}'_{\alpha\beta}(A) = \text{per}(A[\omega^{(\alpha)} | \omega^{(\beta)}]) / \rho(\omega^{(\alpha)})$$

$$\left( \omega^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}, \quad \omega^{(\beta)} \in Q_{r,n}, \quad \alpha, \beta = \overline{1, C_n^r} \right).$$

იმ შემთხვევაში, როცა  $r$ -მიმდევრობები  $\omega^{(\alpha)}$  გადანომრილია ლექსიკოგრაფულად, მატრიცას  $\mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) = [\mathfrak{p}'_{\alpha\beta}(A)]$  ვუწოდებთ  $A \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცის  $r$ -ინდუცირებულ მატრიცას (იხ. [67]).

ზემოთ განხილულ მაგალითში, როცა  $n=2$ ,  $A \in M_2(\mathbb{F})$  და  $r=2$ , გვექნება

$$\omega^{(\alpha)} = \{1, 1\} \in G_{2,1}, \quad \omega^{(\beta)} = \{1, 2\} \in Q_{2,2} \quad \text{და} \quad \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) = 2^{-1} \text{per}(A[1,1|1,2]) = a_{11} a_{12}.$$

აქედან ნათელია, რომ საზოგადოდ  $\det \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)})$  და  $\det A$ , როგორც  $a_{ik}$  ცვლადების ფუნქციები, არიან ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი ( $\det \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) = a_{11} a_{12}$  და არ შეიცავს  $a_{21}, a_{22}$ ).

ნაშრომში [67] ნახვენებია, რომ ვანდერმონდის მატრიცისათვის სამართლიანია

**თეორემა 3.** თუ  $A = V(x_1, 1; \dots; x_n, 1) = [x_j^{i-1}]_1^n \in M_n(\mathbb{F})$ , მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$(79) \quad \det \mathfrak{F}'_r(V, \omega^{(\alpha)}) = (\det V)^{C_{n-2}^{r-1}} = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)^{C_{n-2}^{r-1}}.$$



კერძო შემთხვევაში  $r=2$  თეორემა 3 ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია შრომაში [96]. ზოგად შემთხვევაში თეორემის დამტკიცება ეყრდნობა ორ ლემას (იხ. [67]):

**ლემა 3.**  $\det \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)})$  დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული  $\omega^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \overline{1, C_n^r}$ ,  $r$ -მიმდევრობების ნუმერაციის არჩევაზე.

**ლემის დამტკიცება.** ვთქვათ,  $r$ -მიმდევრობების რომელიმე ნუმერაციას  $\omega^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}$ ,  $\alpha = \overline{1, C_n^r}$ , შეესაბამება მატრიცა  $\mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)})$ , ხოლო ნუმერაციას  $\omega^{(\sigma(\alpha))} \in G_{r, n-r+1}$  – მატრიცა  $\mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\sigma(\alpha))})$ . მაშინ (იხ., მაგ., [59], გვ. 101)

$$\mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\sigma(\alpha))}) = T^{-1} \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) T,$$

სადაც  $C_n^r \times C_n^r$  მატრიცა  $T$  მიიღება ერთეულოვანი  $E \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცის სვეტების  $\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$  გადანაცვლებით. ცხადია, რომ

$$\det T = \pm 1 = \det T^{-1}.$$

ამიტომ გვაქვს

$$(80) \quad \det \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\sigma(\alpha))}) = \det \mathfrak{F}'_r(A, \omega^{(\alpha)}) = \det \mathfrak{F}'_r(A). \quad \blacksquare$$

განვიხილოთ  $\lambda$ -მატრიცა  $A(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$ , რომლის სვეტები აღვნიშნოთ  $A_j(\lambda)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $n \geq 2$ . ნაშრომში [67] ნახვენებია, რომ სამართლიანია შემდეგი

**ლემა 4.** თუ  $\lambda = \lambda_c$  წერტილში  $A(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცის  $2k$  სვეტი წვეილ-წვეილად ტოლია,

ი.ი., თუ

$$(81) \quad A_{j_1}(\lambda_c) = A_{j_2}(\lambda_c), \dots, A_{j_{2k-1}}(\lambda_c) = A_{j_{2k}}(\lambda_c), \quad 1 \leq k \leq [n/2],$$

მაშინ  $\lambda_c$  არის  $\det A(\lambda)$  მრავალწევრის ფესვი და ამ ფესვის ჯერადობაა  $\geq k$  (აქ  $[v]$  აღნიშნავს  $v \in \mathbb{Z}$  რიცხვის მთელ ნაწილს).

**ლემის დამტკიცება.**  $n$  რიგის  $\det A(\lambda)$  დეტერმინანტის  $m$ -ჯერ გაწარმოება ( $1 \leq m \leq n$ ) გვაძლევს (იხ., მაგ., [131], გვ. 52)  $n^m$  შესაკრების ჯამს, სადაც თითოეული შესაკრები არის იმავე  $n$  რიგის დეტერმინანტი, რომლის რომელიმე  $l$  სვეტში ( $1 \leq l \leq m$ ) დგას

წარმოებულები  $\frac{d^p}{d\lambda^p} A_{j_q}(\lambda)$ ,  $p = \overline{1, m-l+1}$ ,  $q = \overline{1, l}$  ხოლო დანარჩენ  $n-l$  სვეტში –  $\det A(\lambda)$

დეტერმინანტის სვეტები  $A_{j_s}(\lambda)$ ,  $q+s=n$  (გაწარმოების გარეშე). ვინაიდან გაწარმოებული სვეტების მაქსიმალური რაოდენობა ტოლია წარმოებულის რიგისა, გამოსახულებაში

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \det A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n^{k-1}} \det B_i(\lambda)$$

ყოველი დეტერმინანტი  $\det B_i(\lambda)$ ,  $i = \overline{1, n^{k-1}}$ , შეიცავს  $\det A(\lambda)$  დეტერმინანტის არანაკლებ

$$n-k+1 = (n-2k) + (k-1)$$

სვეტს. წერტილში  $\lambda = \lambda_c$  ამ სვეტებს შორის, თანახმად (81) ტოლობებისა, მოიძებნება არანაკლებ ორი ერთნაირისა. მაშასადამე

$$\det A(\lambda)|_{\lambda=\lambda_c} = \frac{d}{d\lambda} \det A(\lambda)|_{\lambda=\lambda_c} = \dots = \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \det A(\lambda)|_{\lambda=\lambda_c} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლემის მტკიცებულება. \blacksquare

განვიხილოთ  $C_n^r \times C_n^r$  მატრიცა, რომლის სვეტებიც აგებულია სრულიად სიმეტრიზებული ნამრავლებით  $[x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1}]_1^{C_n^r}$ , ( $i_1 \leq \dots \leq i_r$ )  $\equiv i^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}$ , ( $j_1 < \dots < j_r$ )  $\equiv j^{(\beta)} \in Q_{r, n}$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1} = \text{per} V[\alpha | \beta]$ , სადაც  $V = [x_j^{i-1}]_1^n$  არის ვანდერმონდის მატრიცა.

3 და 4 ლემებიდან გამომდინარეობს

**შედეგი 3. დეტერმინანტს**

$$p(V_n, r) \equiv \det \left( \left[ x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1} \right]_1^{C_n^r} \right) \\ \left( i^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}, j^{(\beta)} \in Q_{r, n}, \alpha, \beta = \overline{1, C_n^r}, 1 \leq r \leq n-1, V_n = [x_j^{i-1}]_1^n \right),$$

როგორც  $x_n$  ცვლადის მრავალწევრს, აქვს ზუსტად  $n-1$  ფესვი წერტილებში  $x_n = x_j, j = \overline{1, n-1}$ , ამასთან,  $j$ -ური ფესვის ჯერადობაა  $\mathfrak{a}_j = C_{n-2}^{r-1}, 1 \leq j \leq n-1$ .

**დამტკიცება.** ნათელია, რომ წერტილი  $x_n = x_j, 1 \leq j \leq n-1$ , არის

$$(82) \quad \det \left( \left[ x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1} \right]_1^{C_n^r} \right) = a_0 x_n^N + \dots + a_N$$

მრავალწევრის ფესვი და ყველა ამ ფესვს აქვს ერთნაირი ჯერადობა

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \dots = \mathfrak{a}_{n-1}.$$

$j_1, \dots, j_r$  ინდექსებით სიმეტრიზებულ  $x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1}$  ნამრავლში  $x_n$  ცვლადის შემცველი შესაკრებების რაოდენობაა  $C_{n-1}^{r-1}$ . ცხადია, ყოველ სვეტს  $r$ -მულტიინდექსით ( $j_1 < \dots < j_{r-1} < n$ )  $= j^{(\alpha)}$ ,  $r \leq n-1$ , (82) დეტერმინანტში მოქცევენება მისი შესაბამისი სვეტი, ისეთი, რომ ეს ორი სვეტი ხდება ერთმანეთის ტოლი, თუ

$$x_n = x_j, 1 \leq s \leq r-1,$$

ამასთან ცხადია, რომ, თუ  $x_k \neq x_j$ , როცა  $k \neq j, k, j = \overline{1, n-1}$ , მაშინ  $x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_{r-1})}^{i_{r-1}-1} x_n^{i_r-1}$  სვეტის ტოლი სვეტი ერთადერთია  $j_1, \dots, j_{r-1}$  ინდექსების ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის. ამრიგად, როცა  $x_n = x_j, 1 \leq j \leq n-1$ , (82) დეტერმინანტში მოქცევენება ტოლი სვეტების  $C_{n-2}^{r-1}$  წყვილი. ამიტომ, 4 ლემის თანახმად, გვაქვს

$$(83) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{a}_j = (n-1) \mathfrak{a}_j \geq (n-1) C_{n-2}^{r-1}.$$

(82) მრავალწევრის  $N$  ხარისხის და  $a_0$  უფროსი კოეფიციენტის გამოსათვლელად (იხ. [67]) გადავზომოთ  $i^{(\alpha)} \in G_{r, n-r+1}$  (და, მაშასადამე,  $j^{(\beta)} \in Q_{r, n}$ )  $r$ -მიმდევრობები ანტილექსიკოგრაფული თანმიმდევრობით, რაც, 3 ლემის თანახმად, არ ცვლის დეტერმინანტის მნიშვნელობას. მაშინ  $x_n$  ცვლადის უმაღლესი  $(n-r)$  ხარისხების შემცველი  $C_{n-1}^{r-1} \times C_{n-1}^{r-1}$  მინორი დგას (82) დეტერმინანტის ზედა მარცხენა კუთხეში. ამ მინორის დამატებითი  $C_{n-1}^r \times C_{n-1}^r$  მინორი არ შეიცავს  $x_n$  ცვლადს და, ლაპლასის თეორემის თანახმად, გვაქვს

$$(84) \quad N = (n-r) C_{n-1}^{r-1} = (n-1) C_{n-2}^{r-1}$$

და

$$(85) \quad a_0 = \det \left( \left[ x_{(j_1)}^{l_1-1} \dots x_{(j_{r-1})}^{l_{r-1}-1} \right]_1^{C_{n-1}^{r-1}} \right) \det \left( \left[ x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1} \right]_1^{C_{n-1}^{r-1}} \right) \prod_{k=1}^r k^{C_{n-k-1}^{r-k}} \neq 0.$$

აქ ხარისხის მაჩვენებლები  $l_s, s = \overline{1, r-1}$ , და  $i_r, r = \overline{1, r}$ , შეადგენენ არაზრდად მიმდევრობებს  $(l_1 \geq \dots \geq l_{r-1}) = l^{(\mu)} \in G_{r-1, n-r+1}$  და  $(i_1 \geq \dots \geq i_r) = i^{(\nu)} \in G_{r, n-r+1}$  შესაბამისად.

(84) და (85) ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$(86) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{a}_j \leq N = (n-1) C_{n-2}^{r-1}$$

და (83) უტოლობასთან შედარება გვაძლევს  $\mathfrak{a}_j = C_{n-2}^{r-1}, 1 \leq j \leq n-1$ . ■

თეორემის დამტკიცება. 3 ლემის გათვალისწინებით, ადვილი შესაძენეია, რომ

$$(87) \quad p(V_n, r) \equiv \det \left( \left[ x_{(j_1)}^{i_1-1} \dots x_{(j_r)}^{i_r-1} \right]_1^{C_n^r} \right) = \det \mathfrak{F}'_r(V_n) \prod_{\omega \in \overline{G_{r,n-r+1}}} \rho(\omega) \\ \left( i^{(\alpha)} \in G_{r,n-r+1}, j^{(\beta)} \in Q_{r,n}, \alpha, \beta = \overline{1, C_n^r}, 1 \leq r \leq n-1 \right).$$

როდესაც  $r=n$ , განმარტების ძალით,  $\mathfrak{F}'_r(A)$  მატრიცის რიგია 1 და გვაქვს

$$\mathfrak{F}'_n(V_n) = 1, \quad \det \mathfrak{F}'_n(V_n) = 1 \\ (V_n = [x_j^{i-1}]_1^n),$$

ანუ თეორემის მტკიცებულება (ფორმულა (79)) ამ შემთხვევაში ჭეშმარიტია.

როდესაც  $1 \leq r \leq n-1$ , 3 შედეგის თანახმად და (85) ფორმულის გათვალისწინებით, ვპოულობთ რეკურენტულ თანაფარდობას:

$$(88) \quad p(V_n, r) = p(V_{n-1}, r-1) p(V_{n-1}, r) \left( \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)^{C_{n-2}^{r-1}} \right) \prod_{k=1}^r k^{C_{n-k-1}^{r-1}}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$p(V_n, 1) = \det [x_j^{i-1}]_1^n = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k), \\ p(V_{n-1}, n-1) = (n-1)!$$

აქედან  $n$ -ით და  $r$ -ით ინდუქციის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(89) \quad p(V_n, r) = \left( \prod_{k=1}^r k!^{C_{n-k-1}^{r-k}} \right)^{n-r+1} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)^{C_{n-2}^{r-1}}, \\ 1 \leq r \leq n-1.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\prod_{\omega \in \overline{G_{r,n-r+1}}} \rho(\omega) = \left( \prod_{k=1}^r k!^{C_{n-k-1}^{r-k}} \right)^{n-r+1} \\ (1 \leq r \leq n-1),$$

(88) და (89) ფორმულებიდან ვღებულობთ (79) თანაფარდობას. ■

ამრიგად, ვანდერმონდის  $V = [x_j^{i-1}]_1^n$  მატრიცისათვის, რომლის ელემენტები  $x_j, j = \overline{1, n}$ , ეკუთვნის ნებისმიერ ველს,  $\det \mathfrak{F}'_r(V) = 0$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $1 \leq r \leq n-1$  და  $x_1, \dots, x_n$  რიცხვთა შორის მოიძებნება ორი მაინც ერთნაირი.

შეგნიშნოთ, რომ საზოგადოდ,  $A \neq V$  ნებისმიერი მატრიცისათვის (79) ფორმულა არ არის მართებული (იხ. ზემოთ განხილული მაგალითი). ამასთან, ადვილია ისეთი  $A \neq V$  მატრიცების პოვნა, რომელთათვისაც ეს ფორმულა სრულდება. ყველა ასეთი მატრიცის სიმრავლის აღწერის ამოცანა დასმულია შრომაში [67].

ამავე ნაშრომში [67] დასმულია ამოცანა შესწავლილ იქნას ამ პარაგრაფში  $\det A$  და  $\text{per} A$  ფუნქციებისათვის განხილული საკითხები  $A \in M_n(\mathbb{F})$  მატრიცის სხვა სკალარული ფუნქციებისათვის, ე.წ. შურის ფუნქციებისათვის.  $\det A$  და  $\text{per} A$  წარმოადგენს შურის ფუნქციების კერძო შემთხვევებს – შესაბამისად, სრულიად ანტისიმეტრიულ და სრულიად სიმეტრიულ ფუნქციებს –  $A$  მატრიცის სვეტების გადასმის მიმართ.

ზოგად შემთხვევაში  $A$  მატრიცის შურის ფუნქციები სიმეტრიულია ამ მატრიცის ზოგიერთი სვეტის გადასმის მიმართ და ანტისიმეტრიულია დანარჩენი სვეტების გადასმის მიმართ (იხ., მაგ., [7], VII, §2-8, გვ. 225-283) და გრაფიკულად აიწერება იუნგის სქემებით. როგორც ცნობილია, ასეთი ფუნქციები ფართოდ გამოიყენება მრავალნაწილაკოვანი კვანტური სისტემების აღსაწერად (იხ., მაგ., [8a], §63, გვ. 272-281).

### III თავის დასკვნები

1. განმარტებულია და ცხადი სახით გამოთვლილია ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტი ჯერადობების ნებისმიერი (ნატურალური) მნიშვნელობებისათვის (ფ-ები (5) და (5')).

2. განმარტებულია ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა (განმარტება 2, ფ-ები (20) და (21)). დამტკიცებულია, რომ ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა დადებითად არის განსაზღვრული ცვლადების დადებითი მნიშვნელობებისა და ჯერადობების ნებისმიერი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული (ნატურალური) მნიშვნელობებისათვის.

3. ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცის გამოყენებით დამტკიცებულია ვიეტის თეორემის ანალოგიური თანაფარდობა ნამდვილი ცვლადის ხარისხთა ჯამისათვის, როცა ხარისხის მაჩვენებლები არ არის მთელი (შედგეი 1, ფ-ლა (35)). ეს შედეგი გამოყენებულია ლაგრანჟის ელემენტარული ინტერპოლაციური მრავალწევრების შემცველი სასრული ჯამის გამოსათვლელად (შედგეი 2, ფ-ები (70-70')).

4. ნებისმიერი მატრიცეს  $r$ -ასოცირებული და  $r$ -ინდუცირებული მატრიცების ანალოგიურად, აგებულია ე.წ.  $r'$ -ინდუცირებული მატრიცა (განმარტება 3, ფ-ლა (78)) და მისი დეტერმინანტი გამოთვლილია ცხადი სახით (ფ-ლა (79)).

5. ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტის ცხადი სახის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ II თავში შემოდებული უნიტარული ინვარიანტების სიმრავლე შედგება ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი (და, მაშასადამე, პოლინომურად დამოუკიდებელი) წევრებისაგან.

6. ვანდერმონდის  $r'$ -ინდუცირებული მატრიცის დეტერმინანტის ცხადი სახის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ მარტივი სპექტრის მქონე ორი არაკომუტირებადი მატრიცის უნიტარული (ნამდვილი ველის შემთხვევაში – ორთოგონალური) ინვარიანტების სისტემა, რომელიც აგებულია II თავში (ფ-ლა (89)), შედგება ფუნქციონალურად (და, მაშასადამე, პოლინომურად) დამოუკიდებელი წევრებისაგან.

კერძოდ, (2.58) სიმრავლეში შემავალი წევრების იაკობიანი (გამოთვლილი ჯერადი საკუთარი მნიშვნელობების მქონე ტენზორის დამოუკიდებელი კომპონენტების ინვარიანტული ფუნქციების სისტემისათვის) დაიყვანება ვანდერმონდის ორჯერადი მატრიცის დეტერმინანტზე. (5), (5') ძალით, ეს იაკობიანი განსხვავდება ნულისაგან.

7. ვანდერმონდის  $r'$ -ინდუცირებული მატრიცის დეტერმინანტის ცხადი სახის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ მარტივი სპექტრის მქონე ორი არაკომუტირებადი მატრიცის უნიტარული (ნამდვილი ველის შემთხვევაში – ორთოგონალური) ინვარიანტების სისტემა, რომელიც აგებულია II თავში (ფ-ლა (2.58)), შედგება ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი (და, მაშასადამე, პოლინომურად დამოუკიდებელი) წევრებისაგან.

თავი IV

ეილერის B-ფუნქციის განზოგადება

დისერტაციის III თავში გამოყვანილი ფორმულა (3.68) გეიხვენებს ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის კავშირს ეილერის ცნობილ ბეტა-ფუნქციასთან, რომელზეც დაიყვანება (3.68) ფორმულის მარცხენა მხარე  $n=1$  შემთხვევაში. ამ კავშირის გათვალისწინებით ნაშრომებში [44a,b] შემოღებულია ფუნქცია

$$(1) \quad B_n(r_0, r_1, \dots, r_n) = B_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n=0, \\ \det^{-1} [x_j^{i-1}]_1^n \det \left[ x_j^{i-1} \int_{x_{j-1}/x_j}^1 u^{i-1} (1-u)^{r_j-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{x_j u - x_k}{x_j - x_k} \right)^{r_k-1} du \right]_1^n, & \text{თუ } n \geq 1 \end{cases}$$

$(0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$

და დასმულია ამოცანა:

$r_j$  პარამეტრების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის დამტკიცდეს ფორმულა

$$(2) \quad B_n(\mathbf{r}) = \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j) / \Gamma(\sum_{j=0}^n r_j),$$

სადაც  $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1} du$  არის ეილერის გამა-ფუნქცია.

ფორმულა (2)  $n=0$  შემთხვევაში სამართლიანია (1) განმარტების ძალით, ხოლო  $n=1$  შემთხვევაში დაიყვანება ეილერის ცნობილ ფორმულაზე

$$(3) \quad B_1(\mathbf{r}) = B(r_0, r_1) = \int_0^1 u^{r_0-1} (1-u)^{r_1-1} du = \Gamma(r_0)\Gamma(r_1) / \Gamma(r_0+r_1),$$

სადაც  $B(r_0, r_1)$  არის ეილერის ბეტა-ფუნქცია, რომელიც განმარტებულია ნებისმიერი კომპლექსური  $r_0$  და  $r_1$  ( $\text{Re } r_0 > 0, \text{Re } r_1 > 0$ ) ცვლადებისათვის.

შრომებში [44] დამტკიცებულია (2) თანაფარდობის ჭეშმარიტება იმ შემთხვევისათვის, როცა  $r_0 > 0, r_j \in \mathbb{N}, j=1, n$  (იხ. ფ-ლა (3.68)). ამრიგად, საქმე გვაქვს ამოცანასთან, ანალიზურად გავაგრძელოთ თანაფარდობა, რომელიც სამართლიანია დაგროვების წერტილის არმქონე სიმრავლეზე. ასეთი ტიპის ამოცანები გვხვდება მაღალი ენერგიების ფიზიკაში, კერძოდ, რეჯეს თეორიაში საჭირო ხდება გაბნევის პარციალური ამპლიტუდების ანალიზური გაგრძელება მომენტის კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის.

წინამდებარე თავში ეს ამოცანა გადაწყვეტილია  $n=2$  შემთხვევისათვის და ნახვენებია [45] ის სირთულეები, რომლებიც ჩნდება  $n \geq 3$  შემთხვევაში. დამტკიცებული ფორმულის გამოყენებით ნაპოვნია მთელი რიგი ახალი თანაფარდობებისა გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის, განზოგადებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის, აგრეთვე ნაპოვნია ანალიზური გამოსახულებები ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალისათვის სპეციალური და ელემენტარული ფუნქციებიდან. ამასთან, გარდა ცნობილი შედეგებისა, მიიღება ახალი თანაფარდობებიც და ზოგიერთი ცნობილი ფორმულის ანალოგებიც.

შესწავლილია მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის თვისებები, კერძოდ, დამტკიცებულია რამდენიმე ახალი თეორემა ამ კლასის ფუნქციებისათვის, რომლებიც აზოგადებს აპელის და ლაურიხელას ფუნქციებისათვის ცნობილ შედეგებს.

ბოლოს, მოცემულია ამოცანის სრული დამტკიცება ზოგად შემთხვევაში.

ამ თავში მოყვანილი ორიგინალური შედეგები გამოქვეყნებულია შრომებში [43]-[47].

### §4.1. ორი ცვლადის შემთხვევა

ინტეგრალები

$$(4) \quad b_{ij} = \int_{x_{j-1}/x_j}^1 u^{i-1}(1-u)^{r_j-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{x_j u - x_k}{x_j - x_k} \right)^{r_k-1} du, \quad i, j = \overline{1, n},$$

რომლებიც ფიგურირებს განმარტებაში (1), შეიძლება დავიყვანოთ მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ (ჰგ) ფუნქციაზე (იხ. ქვემოთ). კერძოდ,  $n=2$  შემთხვევაში ვისარგებლოთ ეილერის ცნობილი ფორმულით (იხ., მაგ., [60], 2.1(10)) გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის

$$(5) \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a} du = {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z) \equiv {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b; z \\ c \end{matrix} \right].$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0)$$

იქ, სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, დავწერთ  ${}_2F_1(a, b; c; z) = F(a, b; c; z)$ .

(4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$(6_1) \quad b_{i1} = \int_0^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_1-1} \left( \frac{x_1 u - x_2}{x_1 - x_2} \right)^{r_2-1} du,$$

$$(6_2) \quad b_{i2} = \int_{x_1/x_2}^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_2-1} \left( \frac{x_2 u - x_1}{x_2 - x_1} \right)^{r_1-1} du,$$

$$(i = 1, 2).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $x_1/x_2 = z$  და ინტეგრალში (6<sub>2</sub>) მოვახდინოთ ჩასმა

$$u = 1 - \tilde{u}(1-z).$$

მივიღებთ:

$$(7_1) \quad b_{i1} = (1-z)^{1-r_2} \int_0^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1} du,$$

$$(7_2) \quad b_{i2} = (1-z)^{r_2} \int_0^1 [1-\tilde{u}(1-z)]^{r_0+i-2} \tilde{u}^{r_2-1} (1-\tilde{u})^{r_1-1} d\tilde{u}.$$

ინტეგრალები (7<sub>1,2</sub>) არის  $z$  ცვლადის ცალსახა ანალიზური ფუნქციები, თუ  $|\arg(1-z)| < \pi$ ,  $\operatorname{Re} r_j > 0$ ,  $j = \overline{0, 2}$ . ამ შემთხვევაში, (5) ინტეგრალური წარმოდგენის გათვალისწინებით, გამარტივების შემდეგ (1) განმარტებიდან მივიღებთ:

$$(8) \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_2(r_0, r_1, r_2) = (x_2 - x_1)^{-1} \det [x_j^{i-1} b_{ij}]_{i,j=1,2} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \int_0^1 u^{r_0-1}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1} du & \int_0^1 [1-(1-z)u]^{r_0-1} u^{r_2-1} (1-u)^{r_1-1} du \\ z \int_0^1 u^{r_0}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1} du & \int_0^1 [1-(1-z)u]^{r_0} u^{r_2-1} (1-u)^{r_1-1} du \end{bmatrix} =$$

$$(\operatorname{Re} r_j > 0, \quad j = \overline{0, 2})$$

$$= \det \begin{bmatrix} F(1-r_2, r_0; r_0+r_1; z) \frac{\Gamma(r_0)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1)} & F(r_2, 1-r_0; r_1+r_2; 1-z) \frac{\Gamma(r_2)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_2+r_1)} \\ zF(1-r_2, r_0+1; r_0+r_1+1; z) \frac{\Gamma(r_0+1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1+1)} & F(r_2, -r_0; r_1+r_2; 1-z) \frac{\Gamma(r_2)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_2+r_1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\Gamma(r_0)\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_0+r_1+r_2)} D(\mathbf{r}; z),$$

სადაც შემოვიღეთ ახალი აღნიშვნა:

$$(9) \quad D(\mathbf{r}; z) = \frac{\Gamma(r_0+r_1+r_2)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)} \det \begin{bmatrix} F(1-r_2, r_0; r_0+r_1; z) & F(r_2, 1-r_0; r_1+r_2; 1-z) \\ z \frac{r_0}{r_0+r_1} F(1-r_2, r_0+1; r_0+r_1+1; z) & F(r_2, -r_0; r_1+r_2; 1-z) \end{bmatrix}.$$

(8) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ  $n=2$  შემთხვევაში (2) ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$(10) \quad D(\mathbf{r}; z) = 1, \quad z \in [0, \infty).$$

შევნიშნოთ, რომ  $z=0$  და  $z=1$  წერტილები განსაკუთრებულია (9) ფორმულით განმარტებული  $D(\mathbf{r}; z)$  ფუნქციისათვის, ვინაიდან ეს წერტილები განსაკუთრებულია გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის. ცნობილია, რომ

$$(11_1) \quad F(a, b; c; 0) = 1,$$

ხოლო  $z=1$  წერტილში გვაქვს (იხ., მაგ., [61], 14.11)

$$(11_2) \quad F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

(11<sub>1,2</sub>) ფორმულების გათვალისწინებით, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(12_1) \quad D(\mathbf{r}; 0) = 1, \quad \text{როცა } \operatorname{Re}(r_1+r_0) > 0,$$

$$(12_2) \quad D(\mathbf{r}; 1) = 1, \quad \text{როცა } \operatorname{Re}(r_1+r_2-1) > 0.$$

ამრიგად, (10) თანაფარდობა სამართლიანია ორივე განსაკუთრებულ წერტილში, თუ  $\operatorname{Re} r_j > 0$ ,  $j=0, 2$  და  $\operatorname{Re}(r_1+r_2-1) > 0$ .

გაუსის ჰგ ფუნქცია  $F(a, b; c; z)$  განმარტებულია  $a, b, c$  პარამეტრების ნებისმიერი კომპლექსური ( $c \neq 0, -1, \dots$ ) მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ (8) და (9) ფორმულები იძლევა  $B_2(\mathbf{r})$  ფუნქციის ანალიზურ გაგრძელებას  $r_0, r_1, r_2$  პარამეტრების ცვლილების კომპლექსურ არეზე.

**თეორემა 1.** *a)  $r_j$  პარამეტრების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის,  $\operatorname{Re} r_j > 0$ ,  $j=0, 2$ , (9) ფორმულით განმარტებული  $D(\mathbf{r}; z)$  ფუნქცია ანალიზურია  $z$  ცვლადის მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე და მუდმივია.*

*b)  $z$  ცვლადის მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე ადვილი აქვს იგივეობა:*

$$(13) \quad F(a, b; c; z) F(1-a, -b; 1-c; z) + z \frac{b(c-a)}{c(1-c)} F(a, b+1; c+1; z) F(1-a, 1-b; 2-c; z) = 1.$$

**დამტკიცება** (იხ. [44a, b]) ეყრდნობა ცნობილ თანაფარდობას, რომელიც აკავშირებს  $z$  და  $1-z$  არგუმენტებზე დამოკიდებულ ჰგ ფუნქციებს (იხ., მაგ., [61], 14.53):

$$(14) \quad F(a, b; c; 1-z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; z) + z^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; z), \quad (|\arg(1-z)| < \pi),$$

და რომელიც ცხადი სახით გვიჩვენებს  $z=1$  წერტილში გაუსის  $F(a, b; c; z)$  ჰგ ფუნქციის განსაკუთრებულობის ხასიათს (ამ წერტილიდან იწყება ჭრილი ნამდვილი ღერძის დადებითი მიმართულებით). (14)-ის გამოყენებით გარდავაქმნათ (9) განმარტების მეორე სვეტი. მივიღებთ

$$(15) \quad D(\mathbf{r}; z) = D_1(z) + z^{r_1+r_0} \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)\Gamma(-r_0-r_1)}{\Gamma(r_2)\Gamma(-r_0)\Gamma(r_0+r_1)} D_2(z),$$

სადაც ორივე ფუნქცია  $D_1(z)$  და  $D_2(z)$  რეგულარულია  $z=0$  წერტილში:

$$(16_1) \quad D_1(z) = \det \begin{bmatrix} F(1-r_2, r_0; r_0+r_1; z) & \frac{r}{r_0+r_1-1} F(1-r_0, r_2; 2-r_0-r_1; z) \\ \frac{zr_0}{r_0+r_1} F(1-r_2, r_0+1; r_0+r_1+1; z) & F(-r_0, r_2; 1-r_0-r_1; z) \end{bmatrix},$$

$$(16_2) \quad D_2(z) = \det \begin{bmatrix} F(r_0, 1-r_2; r_0+r_1; z) & F(r_1, r-1; r_0+r_1; z) \\ F(r_0+1, 1-r_2; r_0+r_1+1; z) & F(r_1, r; r_0+r_1+1; z) \end{bmatrix}.$$

აქ შემოკლებისათვის აღნიშნულია  $r=r_0+r_1+r_2$ .

წერტილი  $z=1$  განსაკუთრებულია ორივე  $D_1(z)$  და  $D_2(z)$  ფუნქციისათვის, ვინაიდან (16) ფორმულების პირველ და მეორე სვეტებში მდგარი ჰგ ფუნქციებისათვის პირობა  $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$  არ სრულდება ერთდროულად:

$$D_1(z): \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(r_0+r_1-r_0+r_2-1) > 0 \\ \operatorname{Re}(2-r_1-r_0+r_0-r_2-1) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(r_1+r_2-1) > 0 \\ \operatorname{Re}(1-r_1-r_2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{r_j | j = \overline{0,2}\} \in \emptyset,$$

$$D_2(z): \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(r_1+r_2-1) > 0 \\ \operatorname{Re}(r_0-r+1) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(r_1+r_2-1) > 0 \\ \operatorname{Re}(1-r_1-r_2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{r_j | j = \overline{0,2}\} \in \emptyset.$$

ამიტომ შრომაში [44] შევისწავლეთ ეს ფუნქციები  $|z|<1$  წრეში, სადაც ჰგ მწკრივები აბსოლუტურად იკრიბება და (16) ფუნქციები ანალიზური.

გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ცნობილი თვისების (იხ., მაგ., [132], 15.3.3):

$$(17) \quad F(c-a, c-b; c; z) = (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z), \quad |\arg(-z)| < \pi,$$

გათვალისწინებით აღვიღო შესამჩნევია, რომ (16<sub>2</sub>) ფორმულაში მეორე სვეტის ჰგ ფუნქციები პროპორციულია პირველი სვეტის ჰგ ფუნქციებისა. ამიტომ  $|z|<1$  წრეში ყველგან, გარდა  $z \in (0,1)$  მონაკვეთის წერტილებისა, გვაქვს

$$(18) \quad D_2(z) = 0, \quad (|z| < 1, z \notin (0,1)),$$

ე. ი. სინგულარული შესაკრები (15) ფორმულაში ისპობა და ვღებულობთ:

$$(19) \quad D(\mathbf{r}; z) = D_1(z) = \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & z \frac{b(a-c)}{c(1-c)} F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b+1; c+1; z) & F(1-a, -b; 1-c; z) \end{bmatrix},$$

( $|z| < 1, z \notin (0,1)$ )

(აქ აღნიშნულია  $a=1-r_2, b=r_0, c=r_0+r_1$ ).

თანახმად (19) ფორმულისა,  $D(\mathbf{r}; z)$  ფუნქცია რეგულარულია  $z=0$  წერტილში. ამიტომ ამ წერტილში არსებობს მისი  $m$  რიგის წარმოებული ნებისმიერი  $m \in \mathbb{N}$  რიცხვისათვის. გავითვალისწინოთ, რომ

$$(20) \quad \frac{d^m}{dz^m} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} F(a+m, b+m; c+m; z), \quad m=1, 2, \dots,$$

და, მაშასადამე,  $z=0$  წერტილში გაუსის ჰგ ფუნქციის  $m$  რიგის წარმოებული არის  $a, b, c$  პარამეტრების რაციონალური ფუნქცია. ამიტომ ამ წერტილში რაციონალურია  $D(\mathbf{r}; z)$  ფუნქციის  $m$  რიგის წარმოებულიც:

$$(21) \quad \frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z) \Big|_{z=0} = R(m; r_0, r_1, r_2)$$

(რაციონალური  $R(m; r_0, r_1, r_2)$  ფუნქციის ცხადი სახე იხ. დამატებაში).



ნაშრომში [44] დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი  $r_0 > 0, r_{1,2} \in \mathbb{N}$  პარამეტრებისათვის სრულდება თანაფარდობა (2), რომლის მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული  $z$  ცვლადზე. მაშასადამე, (21) ფორმულაში შემავალი  $R(m; r_0, r_1, r_2)$  რაციონალური ფუნქცია ნულის ტოლია ყველა  $r_0 > 0, r_{1,2} \in \mathbb{N}$  მნიშვნელობებისათვის, ე.ი. ეს ფუნქცია ნულის ტოლია იგივეურად:

$$R(m; r_0, r_1, r_2) \equiv 0.$$

ამრიგად, ყველა  $r_j$  პარამეტრისათვის,  $\operatorname{Re} r_j > 0, j = \overline{0, 2}$ , გვაქვს

$$(22) \quad \frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z)|_{z=0} = 0, \quad (|z| < 1), \quad m = 1, 2, \dots,$$

ე.ი., როცა  $\operatorname{Re} r_j > 0, j = \overline{0, 2}$ , ფუნქცია  $D(\mathbf{r}; z)$  არ არის დამოკიდებული  $z$  ცვლადზე  $|z| < 1$  წრეში და, ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით, ანალიზურია და მუდმივი  $z$  ცვლადის მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე. აქედან, (12<sub>1</sub>) გათვალისწინებით, ვღებულობთ (10) იგივეობას. (19) ფორმულაში (10) იგივეობის გათვალისწინებით ვღებულობთ დასამტკიცებელ (13) ფორმულას. ■

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია შემდეგი

**შედეგი 1.**  $n=2$  შემთხვევაში ფორმულა (2) სამართლიანია ნებისმიერი  $r_j, \operatorname{Re} r_j > 0, j = \overline{0, 2}$  მნიშვნელობებისათვის.

დამტკიცებისათვის საკმარისია (8) ფორმულაში შევიტანოთ (10). ■

### § 4.2. 4.1 თეორემიდან გამომდინარე შედეგები

**შედეგი 2.** (13) ფორმულაში შემავალი ჰგ ფუნქციების გარდაქმნა მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციებისათვის გაუსის ფორმულების გამოყენებით ( $F(a, b; c; z)$  ფუნქციის მოსაზღვრე ეწოდება ექვს ფუნქციას  $F(a \pm 1, b; c; z), F(a, b \pm 1; c; z), F(a, b; c \pm 1; z)$ ) მოგვცემს კიდევ მთელ რიგ თანაფარდობებს ჰგ ფუნქციებს შორის.

**მაგალითი 1.** შეეცვალოთ (13) ფორმულაში  $c$  პარამეტრის აღნიშვნა:  $c = c_1 - 1$ , და გამოვიყენოთ გაუსის ფორმულები

$$(*) \quad \begin{aligned} \alpha_1 F(a, b; c; z) + \beta_1 F(a, b+1; c; z) + \gamma_1 F(a, b; c-1; z) &= 0, \\ \alpha_2 F(a, b; c; z) + \beta_2 F(a, b-1; c; z) + \gamma_2 F(a, b; c+1; z) &= 0, \end{aligned}$$

სადაც (იხ., მაგ., [60], 2.8(42), (43))

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -b + c - 1, \quad \beta_1 = b, \quad \gamma_1 = 1 - c, \\ \alpha_2 &= c(1 - z), \quad \beta_2 = -c, \quad \gamma_2 = (c - a)z. \end{aligned}$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$(23) \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & b(z-1)F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b+1; c; z) & (c-b-1)F(1-a, -b; 2-c; z) \end{bmatrix} = c-1,$$

საიდანაც,  $a \rightleftharpoons b$  აღნიშვნების შეცვლით და გაუსის ჰგ ფუნქციის (5) სიმეტრიის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$(24) \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & a(z-1)F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a+1, b; c; z) & (c-a-1)F(-a, 1-b; 2-c; z) \end{bmatrix} = c-1.$$

ანალოგიურად,  $b \rightarrow b_1 = b + 1$  აღნიშვნის შეცვლის და (\*) ფორმულების გამოყენებით, ვღებულობთ

$$(25) \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & z \frac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)} F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b; c+1; z) & (1-z)F(1-a, 1-b; 1-c; z) \end{bmatrix} = 1.$$

**მაგალითი 2.** აღნიშნით  $a_1, b_1, c_1$  (23)-(24) ფორმულებში დეტერმინანტის მეორე სტრიქონში შემავალი ჰგ ფუნქციების პარამეტრები და გადავსვათ პირველი და მეორე სტრიქონები. მივიღებთ ფორმულებს:

$$(23') \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & (b-c)F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b-1; c; z) & (1-z)(b-1)F(1-a, 2-b; 2-c; z) \end{bmatrix} = c-1,$$

$$(24') \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & (a-c)F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a-1, b; c; z) & (1-z)(a-1)F(2-a, 1-b; 2-c; z) \end{bmatrix} = c-1.$$

$$(25') \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & (1-z)F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b; c-1; z) & z \frac{(c-a-1)(c-b-1)}{(c-1)(c-2)} F(1-a, 1-b; 3-c; z) \end{bmatrix} = -1.$$

**შენიშვნა:** როგორც გამომდინარეობს დამტკიცებული თეორემიდან, (19) და (23)-(25') ფორმულებში შემავალი ჰგ ფუნქციების განსაკუთრებულობა (ჭრილი  $z \in [1, \infty)$  სხივის გასწვრივ) იკვეცება. ამიტომ  $z=1$  წერტილი არის ამ ფორმულებში შემავალი დეტერმინანტების რეგულარული წერტილი და ეს ფორმულები შეიძლება გამოვიყენოთ ამ წერტილში მაშინაც, როცა არ სრულდება (11z) ფორმულის გამოყენების პირობები.

საილუსტრაციოდ დამატებაში  $B$  განხილულია დეტერმინანტი (19).

**შედეგი 3.** ვისარგებლოთ თანაფარდობებით (იხ., მაგ., [60], 2.8(21) და 2.8(23))

$$aF(a+1, b; c; z) = z^{1-a} d/dz (z^a u_1(z)),$$

$$(a-c+1)F(-a, 1-b; 2-c; z) = z^{c-a}(1-z)^{1+a+b-c} d/dz (z^a u_5(z)),$$

სადაც (იხ., მაგ., [60], 2.9(1), (2) და 2.9(17), (18))

$$(**) \quad u_1(z) = F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z),$$

$$u_5(z) = z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; z) = z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z)$$

არის გაუსის ჰგ განტოლების კუმერის ამონახსნები. (24) ფორმულაში შეტანის და გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ ფორმულას  $u_1(z), u_5(z)$  ამონახსნების ვრონსკიანისათვის [133]:

$$(26) \quad w_{15}(z) = w\{u_1(z), u_5(z)\} = \det \begin{bmatrix} u_1(z) & u_5(z) \\ d/dz u_1(z) & d/dz u_5(z) \end{bmatrix} = (1-c)z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}.$$

აღნიშნით, რომ (9) და (10) ფორმულებიდან გამომდინარე შედეგი

$$(27) \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & F(1-a, 1-b; c-a-b+1; 1-z) \\ zb/c F(a, b+1; c+1; z) & F(1-a, -b; c-a-b+1; 1-z) \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a+1)\Gamma(c-b)}$$

დაიყვანება ფორმულაზე  $w_{16}(z) \equiv w\{u_1(z), u_6(z)\}$  ვრონსკიანისათვის, თუ გავითვალისწინებთ დეტერმინანტის მეორე სვეტში შემავალი ჰგ ფუნქციების კავშირს ჰიპერგეომეტრიული განტოლების კუმერის  $u_6(z)$  ამონახსნთან (იხ., მაგ., [60], 2.9(25) და 2.8(23)):

$$F(1-a, 1-b; c-a-b+1; 1-z) = z^{c-1}(1-z)^{a+b-c} u_6(z),$$

$$F(1-a, -b; c-a-b+1; 1-z) = (a-c)^{-1} z^c (1-z)^{1+a-c} d/dz [(1-z)^b u_6(z)]$$

და ფორმულას (იხ., მაგ., [60], 2.8(25))

$$bF(a, b+1; c+1; z) = c(a-c)^{-1}(1-z)^{1-b} d/dz \left( (1-z)^b u_1(z) \right).$$

(27) თანაფარდობაში ამ ფორმულების შეტანის და გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ

$$(28) \quad w_{16}(z) = -w_{61}(z) = -\Gamma(c)\Gamma(c-a-b+1)[\Gamma(c-a)]^{-1}[\Gamma(c-b)]^{-1}z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}.$$

გავითვალისწინოთ კუმერის თანაფარდობები, რომლებიც აკავშირებს გაუსის ჰგ განტოლების  $u_1(z), \dots, u_6(z)$  ამონახსნებიდან ნებისმიერ სამს (იხ., მაგ., [60], 2.9(35)–(43)):

$$(29) \quad u_q(z) = \alpha_q u_1(z) + \beta_q u_5(z), \quad q = \overline{1, 6},$$

სადაც  $\alpha_q$  და  $\beta_q$  არ არის დამოკიდებული  $z$  ცვლადზე. (26) და (29) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$(30) \quad w_{pq}(z) \equiv w\{u_p(z), u_q(z)\} = K_{pq} z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1},$$

სადაც

$$(31) \quad K_{pq} = -K_{qp} = (1-c)(\alpha_p \beta_q - \alpha_q \beta_p) = (1-c) \det \begin{bmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \alpha_q & \beta_q \end{bmatrix}, \quad p, q = \overline{1, 6}.$$

$K_{pq}$  კოეფიციენტები  $p, q = \overline{1, 6}$  ინდექსების ყველა არატრივიალური მნიშვნელობებისათვის გამოთვლილია დამატებაში B (იხ. ფორმულები (B.14) - (B.28)).

**შედეგი 4.** გარდაეკმნათ (30) ფორმულის მარცხენა მხარე:

$$w_{pq}(z) = u_p(z) d/dz u_q(z) - u_q(z) d/dz u_p(z) = u_p^2(z) d/dz \left[ u_q(z)/u_p(z) \right].$$

(29) ფორმულის გათვალისწინებით აქედან ვპოულობთ:

$$(32) \quad \int_{z_0}^z u_p^{-2}(z) w_{pq}(z) dz = \frac{1}{u_p(z) u_p(z_0)} \det \begin{bmatrix} u_q(z) & u_q(z_0) \\ u_p(z) & u_p(z_0) \end{bmatrix} = \frac{\alpha_p \beta_q - \alpha_q \beta_p}{u_p(z) u_p(z_0)} \det \begin{bmatrix} u_5(z) & u_5(z_0) \\ u_1(z) & u_1(z_0) \end{bmatrix},$$

საიდანაც, (30) და (31) ფორმულების გათვალისწინებით ვღებულობთ თანაფარდობას

$$(33) \quad \int_{z_0}^z \frac{(1-t)^{c-a-b-1}}{t^c u_p(t)^2} dt = \frac{1}{(1-c) u_p(z) u_p(z_0)} \det \begin{bmatrix} u_1(z_0) & u_5(z_0) \\ u_1(z) & u_5(z) \end{bmatrix}. \quad (p = \overline{1, 6})$$

ავიღოთ აქ  $p=1$ ,  $z_0=0$ ,  $z=1$  და გავითვალისწინოთ (29)-(31), (\*\*\*) და (14). მივიღებთ:

$$(34) \quad \int_0^1 [F(a, b; c; t)]^{-2} t^{-c} (1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}.$$

$$(\operatorname{Re}(a+b) < \operatorname{Re} c < 1)$$

მსგავსადვე, (33) ფორმულაში  $p=1$ ,  $z_0=1$ ,  $z=\infty$  მნიშვნელობების შეტანა და გამარტივება ჰგ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობის (იხ., მაგ., [60], 2.10(2) და 2.10(5)) და (B.2) და (14) ფორმულების გათვალისწინებით გვაძლევს ფორმულას (დამტკიცება იხ. შრომაში [45a]):

$$(35) \quad \int_1^{\infty \pm i0} \frac{\Gamma^2(c)}{t^c (t-1)^{a+b-c+1} [F(a, b; c; t)]^2} dt = e^{\pm i\pi b} \sin \pi b \Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b).$$

$$(\operatorname{Re}(a-b) \leq 0, \operatorname{Re}(c-a-b) > 0)$$

ფორმულები (34) და (35) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$(34') \quad \frac{\sin \pi c}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{\Gamma^2(c)}{[F(a, b; c; t)]^2} t^{-c} (1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)},$$

$$(35') \quad \frac{\Gamma^2(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \int_1^{\infty \pm i0} [F(a, b; c; t)]^{-2} t^{-c} (t-1)^{c-a-b-1} dt = \frac{e^{\pm i\pi b}}{\Gamma(1-b)},$$

რომელიც, ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით, მართებულია  $a, b, c$  არგუმენტების ყველა კომპლექსური (სასრული) მნიშვნელობებისათვის.

**შედეგი 5.** გაუსის ჰგ ფუნქციების პარამეტრების კერძო მნიშვნელობების შერჩევით (13), (23)-(28) და (30)-(35) ფორმულებიდან ვღებულობთ მთელ რიგ თანაფარდობებს სხვადასხვა სპეციალური და ელემენტარული ფუნქციებისათვის. შევნიშნოთ, რომ (33) ინტეგრალი აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი ჰგ ფუნქციები ერთდროულად გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით. ამასთან, თუ ეს ხერხდება პარამეტრების რომელიმე  $a, b, c$  მნიშვნელობებისათვის, მაშინ ეს მოხერხდება  $a \pm l, b \pm m, c \pm n$  მნიშვნელობებისათვისაც ( $l, m, n = 1, 2, \dots, c \pm n \neq 0, -1, -2, \dots$ ).

**მაგალითი 3.** (33) ფორმულაში ჩავსვათ  $b=1-a, t=(1-\xi)/2$ . მაშინ (იხ., მაგ., [132], 15.4.16)

$$F(a, 1-a; c; (1-\xi)/2) = \Gamma(c) [(\xi-1)/(\xi+1)]^{(1-c)/2} P_{-a}^{1-c}(\xi),$$

$$F(1-a, a; 2-c; z) = F(a, 1-a; 2-c; z) = \Gamma(2-c) [(-z)/(1-z)]^{(c-1)/2} P_{-a}^{c-1}(1-2z),$$

$$(\xi \notin (-1, 1), \quad |\arg(\xi-1)| < \pi, \quad |\arg(\xi+1)| < \pi),$$

სადაც  $P_{\nu}^{\mu}(\xi)$  – ლეჟანდრის ფუნქციაა. შევცვალოთ აღნიშვნები:  $\mu=1-c, \nu=-a, \eta=1-2z, \eta_0=1-2z_0$ . გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\xi}{(\xi^2-1)[P_{\nu}^{\mu}(\xi)]^2} = \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} \left\{ \frac{P_{\nu}^{\mu}(\eta)}{P_{\nu}^{-\mu}(\eta)} - \frac{P_{\nu}^{\mu}(\eta_0)}{P_{\nu}^{-\mu}(\eta_0)} \right\}.$$

**მაგალითი 4.** (26) ფორმულაში ავიღოთ  $z = \tilde{z}/b$ . გვექნება

$$\det \begin{bmatrix} u_1(\tilde{z}/b) & u_5(\tilde{z}/b) \\ b \frac{d}{d\tilde{z}} u_1(\tilde{z}/b) & b \frac{d}{d\tilde{z}} u_5(\tilde{z}/b) \end{bmatrix} = (1-c)(\tilde{z}/b)^{-c} (1-\tilde{z}/b)^{c-a-b-1}.$$

ამ გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ, რომ

$$u_5(\tilde{z}/b) = (\tilde{z}/b)^{1-c} (1-\tilde{z}/b)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; \tilde{z}/b).$$

მივიღებთ

$$\det \begin{bmatrix} F(a, b; c; \tilde{z}/b) & \tilde{z}^{1-c} (1-\tilde{z}/b)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; \tilde{z}/b) \\ \frac{d}{d\tilde{z}} F(a, b; c; \tilde{z}/b) & \frac{d}{d\tilde{z}} \left[ \tilde{z}^{1-c} (1-\tilde{z}/b)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; \tilde{z}/b) \right] \end{bmatrix} = (1-c) \tilde{z}^{-c} (1-\tilde{z}/b)^{c-a-b-1}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე  $b \rightarrow \infty$ . მაშინ  $(1-\tilde{z}/b)^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \exp(\tilde{z})$  და (იხ., მაგ., [60], §6.1)

$${}_2F_1 \left( a, b; c; \frac{\tilde{z}}{b} \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} {}_1F_1(a, c; \tilde{z}),$$

$${}_2F_1 \left( 1-a, 1-b; 2-c; \frac{\tilde{z}}{b} \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} {}_1F_1(1-a, 2-c; -\tilde{z}),$$

სადაც  ${}_1F_1(a, c; \tilde{z})$  არის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია (კუმერის ფუნქცია). შედეგად ვღებულობთ ცნობილ ფორმულას გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების  $y_1(z) = {}_1F_1(a, c; z)$  და  $y_4(z) = z^{1-c} \exp(z) {}_1F_1(1-a, 2-c; -z)$  ვრონსკიანისათვის (იხ. [60], 6.3(2)-(5) და 6.3(9)):

$$w\{y_1(z), y_4(z)\} = \det \begin{bmatrix} {}_1F_1(a, c; \tilde{z}) & \tilde{z}^{1-c} \exp(\tilde{z}) {}_1F_1(1-a, 2-c; -\tilde{z}) \\ \frac{d}{d\tilde{z}} {}_1F_1(a, c; \tilde{z}) & \frac{d}{d\tilde{z}} \left[ \tilde{z}^{1-c} \exp(\tilde{z}) {}_1F_1(1-a, 2-c; -\tilde{z}) \right] \end{bmatrix} = (1-c) \tilde{z}^{-c} \exp(\tilde{z}).$$

ამავე ხერხით (30) და (B.14)-(B.28) ფორმულებიდან შეიძლება ვიპოვოთ ვრონსკიანები გადაგვარებული ჰგ განტოლების დანარჩენი ამონახსნებისათვის.

**მაგალითი 5.** (33) ფორმულაში ჩავსვათ  $b=-a$ ,  $c=1/2$ ,  $t=\sin^2\xi$ ,  $z=\sin^2\eta$ ,  $z_0=0$ . მაშინ (იხ., მაგ., [60], 2.8(11))  $F(a, -a; 1/2; \sin^2\xi) = \cos 2a\xi$  და ვღებულობთ:

$$\int_0^\eta \frac{2}{\cos^2 2a\xi} d\xi = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(2a\eta) = \frac{2 \sin \eta F(1/2+a, 1/2-a; 3/2; \sin^2 \xi)}{\cos(2a\eta)},$$

საიდანაც მიიღება ცნობილი (იხ., მაგ., [60], 2.8(12)) ფორმულა:

$$F(1/2+a, 1/2-a; 3/2; \sin^2 \xi) = (\sin 2a\xi) / (2a \sin \xi).$$

**მაგალითი 6.** გამოვიყენოთ (33) ფორმულა, როცა  $c \rightarrow 1$ . აღვნიშნოთ  $c=1-\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , გავითვალისწინოთ თანაფარდობა (17) და გადავიდეთ ზღვარზე  $\varepsilon \rightarrow 0$  ((33) ინტეგრალის თანაბარი კრებადობა ადვილად მოწმდება). მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \frac{dt}{t(1-t)^{a+b} [F(a, b; 1; t)]^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{z^\varepsilon F(1-a, 1-b; 1+\varepsilon; z)}{F(1-\varepsilon-a, 1-\varepsilon-b; 1-\varepsilon; z)} - \frac{z_0^\varepsilon F(1-a, 1-b; 1+\varepsilon; z_0)}{F(1-\varepsilon-a, 1-\varepsilon-b; 1-\varepsilon; z_0)} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{z^\varepsilon F(1-a, 1-b; 1+\varepsilon; z)}{F(1-\varepsilon-a, 1-\varepsilon-b; 1-\varepsilon; z)} - \frac{z_0^\varepsilon F(1-a, 1-b; 1+\varepsilon; z_0)}{F(1-\varepsilon-a, 1-\varepsilon-b; 1-\varepsilon; z_0)} \right\}. \end{aligned}$$

ამ ფორმულაში (5) წარმოდგენის გამოყენებით და გამა-ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_{z_0}^z \frac{dt}{t(1-t)^{a+b} [F(a, b; 1; t)]^2} = \ln \frac{z}{z_0} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ z^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, z) - z_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, z_0) \right\},$$

სადაც

$$f(\varepsilon, z) \equiv \left[ \int_0^1 u^{1-b-\varepsilon-1} (1-u)^{b-1} (1-zu)^{a+\varepsilon-1} du \right]^{-1} \left[ \int_0^1 u^{1-b-1} (1-u)^{b+\varepsilon-1} (1-zu)^{a-1} du \right].$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების დიფერენცირება (5) და (B.2) ფორმულების გათვალისწინებით და  $\varepsilon \rightarrow 0$  ზღვარზე გადასვლა მოგვცემს

$$(36) \quad \int_{z_0}^z \frac{t^{-1} (1-t)^{-a-b} dt}{[F(a, b; 1; t)]^2} = \ln \frac{z}{z_0} + \frac{\sin \pi b}{\pi} \left[ \frac{I(a, b; z)}{F(1-a, 1-b; 1; z)} - \frac{I(a, b; z_0)}{F(1-a, 1-b; 1; z_0)} \right],$$

სადაც  $I(a, b; z)$  აღნიშნავს შემდეგ ინტეგრალს:

$$I(a, b; z) \equiv \int_0^1 u^{-b} (1-u)^{b-1} (1-zu)^{a-1} \ln \frac{u(1-u)}{1-zu} du.$$

როცა  $a=1$ , ფორმულა (36) მარტივდება და დაიყვანება ცნობილ თანაფარდობაზე (იხ., მაგ., [132], 6.6.8)

$$(***) \quad F(1, 2-b; 2; z) = -z^{-1} B_z(1, b-1) = z^{-1} (b-1)^{-1} [1 - (1-z)^{b-1}].$$

მართლაც, (36) თანაფარდობის მარცხენა მხარეში გამოვიყენოთ ფორმულა  $F(1, b; 1; t) = (1-t)^{-b}$  (იხ., მაგ., [132], 15.2.12), ხოლო მარჯვენა მხარეში – იგივეობა  $F(0, b; c; z) = 1$ . შედეგად მივიღებთ

$$\int_{z_0}^z t^{-1} (1-t)^{-1+b} dt = \ln \frac{z}{z_0} + \frac{\sin \pi b}{\pi} \int_0^1 u^{-b} (1-u)^{b-1} \ln \frac{1-z_0 u}{1-zu} du.$$

$$(0 < \operatorname{Re} b < 1)$$

აქედან,  $z$  ცვლადით გაწარმოებისა და (5) ინტეგრალური წარმოდგენის გამოყენებით, გამარტივებების შემდეგ ვღებულობთ (\*\*\*) ფორმულას.

**მაგალითი 7.** ჩავსვათ (36) ფორმულაში  $a=b=1/2$  და გავითვალისწინოთ, რომ (იხ., მაგ., [132], 17.3.9)  $F(1/2, 1/2; 1; z) = (2/\pi)\mathbf{K}(z)$ , სადაც  $\mathbf{K}(z) = F(\pi/2|z)$  არის I გვარის სრული ელიფსური ინტეგრალი. გვექნება

$$(\pi^2/4) \int_{z_0}^z [t(1-t)\mathbf{K}^2(t)]^{-1} dt = \ln(z/z_0) + 1/2 \{I(1/2, 1/2, z)/\mathbf{K}(z) - I(1/2, 1/2, z_0)/\mathbf{K}(z_0)\}.$$

აქედან, (B.33) ფორმულის გათვალისწინებით (იხ. [45]), მივიღებთ

$$(37) \quad \int_{z_0}^z [t(1-t)\mathbf{K}^2(t)]^{-1} dt = -(4/\pi) \{ \mathbf{K}(1-z)/\mathbf{K}(z) - \mathbf{K}(1-z_0)/\mathbf{K}(z_0) \} \quad (z \neq 0, z_0 \neq 0)$$

კერძოდ, გვექნება

$$(37') \quad \int_{1/2}^1 [t(1-t)\mathbf{K}^2(t)]^{-1} dt = 4/\pi.$$

ანალოგიურად, (37) ფორმულაში შევიტანოთ  $a=-b=-1/2$  და გავითვალისწინოთ ფორმულა (იხ., მაგ., [132], 17.3.10)  $F(-1/2, 1/2; 1; z) = (2/\pi)\mathbf{E}(z)$ , სადაც  $\mathbf{E}(z) = E(\pi/2|z)$  არის II გვარის სრული ელიფსური ინტეგრალი, გვექნება

$$(\pi^2/4) \int_{z_0}^z t^{-1}\mathbf{E}^{-2}(t) dt = \ln(z/z_0) + [\pi F(3/2, 1/2; 1; z)]^{-1} I(3/2, 1/2, z) - [\pi F(3/2, 1/2; 1; z_0)]^{-1} I(3/2, 1/2, z_0).$$

ამ ფორმულაში  $I(3/2, 1/2, z)$  და  $F(3/2, 1/2; 1; z)$  მნიშვნელობების შეტანით ვღებულობთ

$$(38) \quad \int_{z_0}^z t^{-1}\mathbf{E}^{-2}(t) dt = -4\pi^{-1} \{ (1-z)\mathbf{D}(1-z)/\mathbf{E}(z) - (1-z_0)\mathbf{D}(1-z_0)/\mathbf{E}(z_0) \}.$$

აქ  $\mathbf{D}(z)$  – III გვარის სრული ელიფსური ინტეგრალია (იხ. [130], 8.111(5)).

**შედეგი 6.** (22) ფორმულიდან, (19), (20) და (11<sub>1</sub>) გათვალისწინებით, ვღებულობთ ზაალშუტცის ფორმულის (იხ., მაგ., [60], 2.1(30)) ანალოგს:

$$(39) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(a-k+1)_{m-1} (b-k+1)_{m-1} m!}{(c-k)_{m+1} k!(m-k)!} [abc + ab(m-2k) + k(m-k)(c-a-b)] = 0$$

$$(m = 1, 2, \dots, a, b, c \in \mathbf{C})$$

(იგივე შედეგი,  $a, b, c$  პარამეტრების აღნიშვნების სიზუსტით, მიიღება (23)-(25') ფორმულე-ბიდანაც). აქედან, თავის მხრივ, მარტივად მიიღება თანაფარდობა განზოგადებულ ჰიპერ-გეომეტრიულ (სასრულ)  ${}_4F_3(\alpha_r; \rho_r; z)|_{z=1}$  მწკრივებს შორის:

$$(40) \quad abc {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a+m-1, b+m-1, c-m-1, -m; \\ a, b, c; \end{matrix} \middle| 1 \right] - 2m(a+m-1)(b+m-1) {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a+m, b+m, c-m, -m+1; \\ a+1, b+1, c+1; \end{matrix} \middle| 1 \right] =$$

$$= m(m-1)(c-a-b-2m+1) {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a+m, b+m, c-m, -m+2; \\ a+1, b+1, c+1; \end{matrix} \middle| 1 \right]. \quad (m = 1, 2, \dots)$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში მდგარი განზოგადებული ჰიპერ-გეომეტრიული ფუნქცია არის ზაალშუტცის სახისა:

$$(a+m) + (b+m) + (c-m) + (-m+2) = (a+1) + (b+1) + (c+1) - 1,$$

ხოლო მარცხენა მხარეში შემავალი ფუნქციები ზაალშუტცის სახისა არ არის.

შევნიშნოდ აგრეთვე, რომ თანაფარდობა (40) შეიძლება ჩავწეროთ რამდენიმე ტოლფასი სახით, თუ გამოვიყენებთ, მაგალითად, ფორმულას (იხ., მაგ., [134c], 7.5.3.(21))

$$(40') \quad {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c; -m; \\ a-m+1, b-m+1, c+m-1 \end{matrix} \right] = \frac{m(m-1)(m+c-a-1)(m+c-b-1)}{(a-m+1)(b-m+1)(c+m-1)(c+m)} {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a+1, b+1, c+1; -m+2; \\ a-m+2, b-m+2, c+m+1, \end{matrix} \middle| 1 \right].$$

### §4.3. მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

(5) ინტეგრალური წარმოდგენის მსგავსად, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$(41) \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1} \prod_{k=1}^n (1-z_k u)^{-b_k} du = F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) = F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right),$$

(Rec > Rea > 0)

სადაც

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}} = \{b_k, z_k \mid k = \overline{1,n}\} = \{b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

აპელისა და კამპე დე ფერიეს მონოგრაფიაში [62] ნახვენებია, რომ (41) ტოლობით განმარტებული ფუნქცია  $F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right)$  არის  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია, რომელიც მიეკუთვნება მ. ლაურიხელას მიერ შესწავლილი ფუნქციების ტიპს (იხ. [135]). ნაშრომში [62] ეს ფუნქცია აღნიშნულია  $F_D$ :

$$F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right) = F_D(a; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n).$$

ამ ფუნქციისათვის სამართლიანია წარმოდგენა მწკრივით (იხ. [62], თავი VII)

$$(42) \quad F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\dots+k_n}}{(c)_{k_1+\dots+k_n}} \prod_{j=1}^n \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!},$$

რომელიც აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც  $|z_j| < 1, j = \overline{1,n}$  აქ  $(a)_k$  აღნიშნავს პოხჰამერის სიმბოლოს:

$$(43) \quad (a)_0 = 1, \quad (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+k-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a+1-k)} = (-1)^k \frac{1}{(1-a)_{-k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

კერძოდ,  $n=2$  შემთხვევაში (41) და (42) ფორმულები გვაძლევს აპელის ჰგ ფუნქციას (იხ. [62], თავი II, აგრეთვე [60], 5.7-5.11 და [130]):

$$F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,2}}\right) = F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2\right) = F_1(a; b_1, b_2, c; z_1, z_2),$$

ხოლო  $n=1$  შემთხვევაში – გაუსის ჰგ ფუნქციას  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  (იხ., მაგ., [60], 2.1(2), 2.1(10)).

ნაშრომში [45a] დამტკიცებულია შემდეგი

**ლემა 1.** როდესაც  $|z_j| < 1, j = \overline{1,n}$ , (41) ტოლობით განმარტებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობა:

$$(44) \quad F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right) = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n}}{(c)_{k_n}} \frac{(b_n)_{k_n} z_n^{k_n}}{k_n!} F\left(\begin{matrix} a+k_n \\ c+k_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n-1}}\right), \quad (n \geq 2).$$

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $n \geq 2, |z_n| < 1$  პირობის გათვალისწინებით, ვისარგებლოთ (41) ფორმულაში ბინომიალური გაშლით. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1} \prod_{k=1}^{n-1} (1-z_k u)^{-b_k} (1-z_n u)^{-b_n} du = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-b_n+1)}{k_n! \Gamma(-b_n+1-k_n)} (-z_n)^{k_n} \int_0^1 u^{a+k_n-1} (1-u)^{c-a-1} \prod_{k=1}^{n-1} (1-z_k u)^{-b_k} du. \end{aligned}$$

აქედან, (43) თანაფარდობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ დასამტკიცებელ (44) ფორმულას. ■

**შენიშვნა:** (41) ფორმულა ინარჩუნებს აზრს  $n=0$  მნიშვნელობისათვისაც, თუ გავითვალისწინებთ სტანდარტულ შეთანხმებებს:  $\prod_{k=m}^n = 1$ ,  $\sum_{k=m}^n = 0$ , როცა  $n < m$ . კერძოდ, (3) ფორმულის გათვალისწინებით (41)-დან ვპოულობთ

$$(41') \quad F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_0\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1} du = 1,$$

ხოლო (44) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ამ შედეგის შეტანა გვაძლევს

$$F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_1\right) = F\left(\frac{a}{c}; b, z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k) k! \Gamma(b)} z^k F\left(\frac{a+k}{c+k}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_0\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}$$

– მწკრივს გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის. როცა  $n=2$ , (44) ფორმულა გვაძლევს კავშირს აპელის და გაუსის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს შორის ([62], II, (15)).

**თეორემა 2.**  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციისათვის (41) ადგილი აქვს მელინ-ბერნსის ტიპის ინტეგრალურ წარმოდგენას  $n$ -ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალის სახით:

$$(45) \quad F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n}\right) = (2\pi i)^{-n} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_n \dots \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_1 \prod_{j=1}^n \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j + s_j)}{\Gamma(b_j)} \cdot (-z_j)^{s_j} \frac{\Gamma(a + s_1 + \dots + s_n)}{\Gamma(c + s_1 + \dots + s_n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}.$$

**დამტკიცება.** (იხ. [44a]).  $n=1$  შემთხვევაში (45) ემთხვევა ბერნსის კონტურულ ინტეგრალს გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის (იხ., მაგ., [61], 14.5)

$$F\left(\frac{a}{c}; b, z\right) = (2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \Gamma(-s) \frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(b)} \cdot (-z)^s \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+s)},$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში თეორემა მართებულია. შევნიშნოთ, რომ  $n=2$  შემთხვევაში (45) იძლევა აპელის  $F_1$  ფუნქციისათვის ცნობილ ფორმულას ([62], თავი II, (25)) და, მაშასადამე, თეორემა მართებულია ამ შემთხვევაშიც.

გაგაკეთოთ ინდუქციური დაშვება

$$F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) = (2\pi i)^{-(n-1)} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_{n-1} \dots \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_1 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j + s_j)}{\Gamma(b_j)} \cdot (-z_j)^{s_j} \frac{\Gamma(a + s_1 + \dots + s_{n-1})}{\Gamma(c + s_1 + \dots + s_{n-1})} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}$$

და გარდავქმნათ (45) ფორმულის მარჯვენა მხარე:

$$(46) \quad (2\pi i)^{-n} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_n \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_{n-1} \dots \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_1 \prod_{j=1}^n \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j + s_j)}{\Gamma(b_j)} \cdot (-z_j)^{s_j} \frac{\Gamma(a + s_1 + \dots + s_n)}{\Gamma(c + s_1 + \dots + s_n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} (2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_n \Gamma(-s_n) \frac{\Gamma(b_n + s_n)}{\Gamma(b_n)} \cdot (-z_n)^{s_n} F\left(\frac{a+s_n}{c+s_n}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) \cdot \frac{\Gamma(a+s_n)}{\Gamma(c+s_n)}.$$

როცა პარამეტრები  $a, b_n, c$  არ არის მთელი არადადებითი რიცხვები, მაშინ ინტეგრალ-ქვეშა ფუნქციას (46) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში აქვს მარტივი პოლუსები წერტილებში  $s_n = k, k = 0, 1, \dots$ . თუ ამავე დროს  $\text{Re}(a + b_n - c) < 0$ , მაშინ ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან მარჯვენა (კომპლექსურ) ნახევარსიბრტყეში განლაგებულ უსასრულო რადიუსის წრეწირზე მიისწრაფის ნულისკენ და (46) ინტეგრალი გამოსახება ამ წერტილებში აღებული ნაშთების ჯამის სახით. (44) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(2\pi i)^{-n} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_1 \dots \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_n \prod_{j=1}^n \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j + s_j)}{\Gamma(b_j)} \cdot (-z_j)^{s_j} \frac{\Gamma(a + s_1 + \dots + s_n)}{\Gamma(c + s_1 + \dots + s_n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_n)_k z_n^k}{(c)_k k!} F\left(\frac{a+k}{c+k}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) = F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n}\right).$$

ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით, ეს შედეგი სამართლიანია  $a, b_n, c$  პარამეტრების ნებისმიერი (კომპლექსური) მნიშვნელობებისათვის. ■



(41) და (42) განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციას აქვს სინგულარობა  $z_n=1$  წერტილში. ამ სინგულარობის ბუნება  $n=1$  შემთხვევაში აიწერება (14) ფორმულით, ხოლო  $n \geq 2$  შემთხვევაში გვაქვს

**თეორემა 3.**  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას (41) ნებისმიერი  $n \geq 1$  მნიშვნელობისათვის აქვს ჭრილი  $z_n$  ცვლადის კომპლექსურ სიბრტყეში  $z_n = +1$  წერტილიდან უსასრულობამდე დადებითი ღერძის გასწვრივ, კერძოდ, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$(47) \quad F\left(\begin{matrix} a; \\ c; \end{matrix} \left\{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \right\}_{1,n}\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n}}{(1-c+a+b_n)_{k_n}} \frac{(1-z_n)^{k_n}}{k_n!} F\left(\begin{matrix} a+k_n; \\ c-b_n; \end{matrix} \left\{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \right\}_{1,n-1}\right) + \\ + (1-z_n)^{c-a-b_n} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b_n-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b_n)} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_{k_n} (c-b_n)_{k_n}}{(1+c-a-b_n)_{k_n}} \frac{(1-z_n)^{k_n}}{k_n!} F\left(\begin{matrix} c-b_n+k_n; \\ c-b_n; \end{matrix} \left\{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \right\}_{1,n-1}\right).$$

**დამტკიცება.**  $n=1$  შემთხვევაში (47) დაიყვანება (14) ფორმულაზე.  $n \geq 2$  შემთხვევაში (45) ფორმულაში გამოვიყენოთ ბერნსის ცნობილი ლემა (იხ., მაგ., [61], 14.52):

$$\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} = (2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(\gamma-t)\Gamma(\delta-t) dt,$$

რომლის თანახმადაც გვექნება

$$\frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_n)\Gamma(b_n+s_n)}{\Gamma(c+s_1+\dots+s_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+t)\Gamma(b_n+t)\Gamma(s_n-t)\Gamma(c-a-b_n-t)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} dt.$$

აქ  $\gamma$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ისეთი, რომ  $\Gamma(s_n-t)\Gamma(c-a-b_n-t)$  გამოსახულების პოლუსები კომპლექსურ  $t$  სიბრტყეში განლაგებულია საინტეგრო გზის მარჯვნივ, ხოლო  $\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+t)\Gamma(b_n+t)$  გამოსახულების პოლუსები - საინტეგრო გზის მარცხნივ ვლებულბოთ

$$F\left(\begin{matrix} a; \\ c; \end{matrix} \left\{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \right\}_{1,n}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{-i\infty}^{i\infty} (-z_n)^{s_n} \Gamma(-s_n) \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j+s_j)}{\Gamma(b_j)} (-z_j)^{s_j} ds_j \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(b_n+t)\Gamma(s_n-t) \frac{\Gamma(c-a-b_n-t)}{\Gamma(b_n)\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+t)}{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} dt \right\} ds_n.$$

თუ  $\gamma$  პარამეტრს ავირჩევთ ისე, რომ  $t$  და  $s_j, j = \overline{1, n}$ , კონტურებს შორის მანძილის ქვედა ზღვარი იყოს დადებითი (ნულისგან განსხვავებული), მაშინ ამ ფორმულაში დასაშვებია იქნება (იხ., მაგ., [61], 14.53) ინტეგრების თანმიმდევრობის შეცვლა. გვექნება

$$F\left(\begin{matrix} a; \\ c; \end{matrix} \left\{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \right\}_{1,n}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(b_n+t)\Gamma(c-a-b_n-t)}{\Gamma(b_n)\Gamma(c-a)} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (-z_n)^{s_n} \Gamma(-s_n)\Gamma(s_n-t) ds_n \right] \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds_j \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j+s_j)}{\Gamma(b_j)} (-z_j)^{s_j} \frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+t)}{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} \right\}.$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მდგარი ინტეგრალი ტოლია ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნაშთების ჯამისა  $\Gamma(-s_n)\Gamma(s_n-t)$  გამოსახულების პოლუსებში:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s_n)(-z_n)^{s_n} \Gamma(s_n-t) ds_n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (-z_n)^l \Gamma(l-t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\pi \sin \pi(l-t)} \frac{(-1)^l (-z_n)^l}{l! \Gamma(1-l+t)} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi \sin \pi(-t)}{\pi \sin \pi(l-t)} \Gamma(-t) \frac{\Gamma(1+t)}{l! \Gamma(1-l+t)} (-1)^l (-z_n)^l = \Gamma(-t) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+t)(-z_n)^l}{l! \Gamma(1-l+t)} = \Gamma(-t)(1-z_n)^t.$$

ამიტომ მივიღებთ

$$F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(b_n+t)}{\Gamma(b_n)} \frac{\Gamma(c-a-b_n-t)}{\Gamma(c-a)} (1-z_n)^t \Gamma(-t) \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (-z_j)^{s_j} \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j+s_j)}{\Gamma(b_j)} \frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+t)}{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} ds_j \right\} dt.$$

აქედან,  $\Gamma(c-a-b_n-t)\Gamma(-t)$  გამოსახულების პოლუსებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნაშთების ჯამის გამოთვლით ვიპოვით (ვგულისხმობთ, რომ  $\gamma < 0$ ):

$$(48) \quad F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} (1-z_n)^k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(b_n+k)}{\Gamma(b_n)} \Gamma(c-a-b_n-k) \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (-z_j)^{s_j} \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j+s_j)}{\Gamma(b_j)} \frac{\Gamma(a+s_1+\dots+s_{n-1}+k)}{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} ds_j \right\} + \\ + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} (1-z_n)^{c-a-b_n} \sum_{k=0}^{\infty} (1-z_n)^k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(a+b_n-c-k)}{\Gamma(b_n)} \frac{\Gamma(c-a+k)}{\Gamma(c-a)} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (-z_j)^{s_j} \Gamma(-s_j) \frac{\Gamma(b_j+s_j)}{\Gamma(b_j)} \frac{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1}+k)}{\Gamma(c-b_n+s_1+\dots+s_{n-1})} ds_j \right\}.$$

გარდავქმნათ (48) გამოსახულება (43) ფორმულისა და 4.2 თეორემის გათვალისწინებით. გვექნება

$$F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n}\right) = \Gamma(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-z_n)^k}{k!} \left\{ (a)_k (b_n)_k \frac{(-1)^k \Gamma(c-a-b_n-k)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)} F\left(\begin{matrix} a+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) + \right. \\ \left. + (1-z_n)^{c-a-b_n} (c-a)_k (c-b_n)_k \frac{(-1)^k \Gamma(a+b_n-c-k)}{\Gamma(a)\Gamma(b_n)} F\left(\begin{matrix} c-b_n+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) \right\} = \\ = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-z_n)^k}{k!} \frac{(a)_k (b_n)_k}{(1+a+b_n-c)_k} F\left(\begin{matrix} a+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) + \\ + (1-z_n)^{c-a-b_n} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b_n-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-z_n)^k}{k!} \frac{(c-a)_k (c-b_n)_k}{(1-a-b_n+c)_k} F\left(\begin{matrix} c-b_n+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right).$$

ამრიგად, ფორმალურად (47) დამტკიცებულია. დამტკიცების დასასრულებლად საკმარისია ვახევნოთ, რომ აქ შემავალ ორივე მწკრივს გააჩნია საერთო კრებადობის არე. როცა  $|z_j| < 1/2$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $|1-z_n| < 1/2$ , ეს ადვილია დალამბერის ნიშნის გამოყენებით, თუ გავითვალისწინებთ (42) და (43) ფორმულებს. ცვლადთა აღნიშნულ არეში ამ მწკრივებით განსაზღვრული ფუნქციები ანალიზურია და (47) ფორმულა იძლევა  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ანალიზური გაგრძელების მაგალითს. ■

გადავწეროთ (47) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$(49) \quad F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}; b_n, 1-z_n\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_n^k}{k!} \frac{(a)_k (b_n)_k}{(1+a+b_n-c)_k} F\left(\begin{matrix} a+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right) + \\ + z_n^{c-a-b_n} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b_n-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_n^k}{k!} \frac{(c-a)_k (c-b_n)_k}{(1-a-b_n+c)_k} F\left(\begin{matrix} c-b_n+k \\ c-b_n \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{1,n-1}\right).$$

შევისწავლოთ მარჯვენა მხარეში შემავალი მწკრივები.

**წინადადება 1.**  $z_1, \dots, z_n$  ცვლადის ხარისხოვანი მწკრივი

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_n)_k z_n^k}{(c_n)_k k!} F\left(\begin{matrix} a+k; \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}}\right) &= \\
 (50) \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_n)_k z_n^k}{(c_n)_k k!} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \frac{(a+k)_{k_1+\dots+k_{n-1}}}{(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!} = \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\dots+k_{n-1}+k_n}}{(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}} (c_n)_{k_n}} \prod_{j=1}^n \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!} \equiv F\left(\begin{matrix} a; \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}}; b_n, z_n\right).
 \end{aligned}$$

განსაზღვრავს ამ ცვლადების ჰგ ფუნქციას შეაღებში  $|z_j| < 1, |z_n| + |z_j| < 1, j = \overline{1, n-1}, n \geq 2$ .

**მართლაც,** (50) მწკრივის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ჰორნის პირობებს მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის მწკრივისათვის (იხ., მაგ., [60], 5.7(2)):

მრავალი ცვლადის ხარისხოვანი მწკრივი  $\sum_{j=1, n}^{\infty} A_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$  ამ მწკრივის კრებადობის

არეში განსაზღვრავს  $z_1, \dots, z_n$  ცვლადების ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას, თუ ფუნქციები  $f_j(k_1, \dots, k_n) = (A_{k_1 \dots k_{j-1} k_{j+1} k_{j+2} \dots k_n}) / (A_{k_1 \dots k_{j-1} k_j k_{j+1} \dots k_n})$  რაციონალურია  $k_j$  ცვლადების მიმართ,  $j = \overline{1, n}$ . პოხჰამერის სიმბოლოს (43) განმარტების თანახმად, (50) მწკრივის კოეფიციენტებისათვის ჰორნის პირობები შესრულებულია:

$$\begin{aligned}
 (51) \quad f_j(k_1, \dots, k_n) &= \frac{A_{k_1 k_2 \dots k_{j-1} k_{j+1} k_{j+2} \dots k_n}}{A_{k_1 k_2 \dots k_{j-1} k_j k_{j+1} \dots k_n}} = \frac{a+k_1+\dots+k_n}{c+k_1+\dots+k_{n-1}} \frac{b_j+k_j}{k_j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\
 f_n(k_1, \dots, k_n) &= \frac{A_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} k_n+1}}{A_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} k_n}} = \frac{a+k_1+\dots+k_n}{c_n+k_n} \frac{b_n+k_n}{k_n+1},
 \end{aligned}$$

მწკრივის კრებადობის არე დავადგინოთ ჰორნის ფუნქციების (იხ. [60], 5.7(40))

$$\Phi_j(k_1, \dots, k_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_j(tk_1, \dots, tk_n), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \Phi_n(k_1, \dots, k_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_n(tk_1, \dots, tk_n)$$

გამოყენებით. ჰგ მწკრივის კრებადობის ასოცირებული რადიუსები გამოისახება ამ ფუნქციებით:  $R_j = |\Phi_j(k_1, \dots, k_n)|^{-1}, j = \overline{1, n-1}, R_n = |\Phi_n(k_1, \dots, k_n)|^{-1}$ . (51) ფორმულების თანახმად, (50) მწკრივისათვის ვპოულობთ:

$$(52) \quad R_j = |\Phi_j(k_1, \dots, k_n)|^{-1} = \frac{k_1 + \dots + k_{n-1}}{k_1 + \dots + k_n}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad R_n = |\Phi_n(k_1, \dots, k_n)|^{-1} = \frac{k_n}{k_1 + \dots + k_n}.$$

აქედან  $R_j + R_n = 1$ , რაც შეესაბამება წინადადებაში მითითებულ კრებადობის არეს. ■

**შენიშვნა.** როდესაც  $n=2$ , ფუნქცია (50) გამოისახება მწკრივით, რომელიც იკრებება აპელის  $F_2$  ფუნქციისაკენ (იხ. [62], II(12), აგრეთვე [60], 5.7(7)):

$$(50') \quad F\left(\begin{matrix} a; & b_1, z_1 & b_2, z_2 \\ & c_1 & c_2 \end{matrix}\right) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+k_2} (b_1)_{k_1} (b_2)_{k_2}}{(c)_{k_1} (c_2)_{k_2}} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{k_1! k_2!} = F_2(a; b_1, b_2; c, c_2; z_1, z_2) = F_2(a; b_2, b_1; c_2, c; z_2, z_1).$$

ამ მწკრივის (აბსოლუტური) კრებადობის არე, როგორც ცნობილია ([60], 5.7(42)), არის ორგანზომილებიანი სიმპლექსი  $|z_1| + |z_2| < 1$ , ხოლო (49) თანაფარდობა ამ შემთხვევაში ჩაიწერება აპელის ფუნქციებით:

$$\begin{aligned}
 (49') \quad F_1(a; b_1, b_2; c; z_1, 1-z_2) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_2)} F_2(a; b_1, b_2; c-b_2, 1+a+b_2-c; z_1, z_2) + \\
 &+ z_2^{c-a-b_2} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b_2-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b_2)} F_2(c-b_2; b_1, c-a; c-b_2, 1-a-b_2+c; z_1, z_2).
 \end{aligned}$$

**თეორემა 4.** (50) მწკრივით განმარტებული  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

$u(z_1, \dots, z_n) = F\left(a; \begin{matrix} \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}} \\ c \end{matrix}; \begin{matrix} b_n, z_n \\ c_n \end{matrix}\right)$  აკმაყოფილებს შემდეგი სახის მეორე რივის კერძო

წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების სისტემას:

$$(53) \quad \left[ \left( c + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \left( 1 + z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right) z_j^{-1} - \left( a + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \left( b_j + z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right] u(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$\left[ \left( c_n + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \left( 1 + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) z_n^{-1} - \left( a + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \left( b_n + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \right] u(z_1, \dots, z_n) = 0.$$

**დამტკიცება.** ისევე, როგორც ნაშრომში [60], შემოვიღოთ ოპერატორები

$$\delta_j \equiv z_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

და (51) ფორმულის მარჯვენა მხარის მრიცხველსა და მნიშვნელში მდგარი პოლინომები აღვნიშნოთ, შესაბამისად,  $G_j(\mathbf{k})$  და  $\tilde{G}_j(\mathbf{k})$ :

$$(54) \quad \begin{aligned} (a + k_1 + \dots + k_j + \dots + k_n)(b_j + k_j) &\equiv G_j(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) \equiv G_j(\mathbf{k}), \quad j = \overline{1, n}, \\ (c + k_1 + \dots + k_j + \dots + k_{n-1})(1 + k_j) &\equiv \tilde{G}_j(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) \equiv \tilde{G}_j(\mathbf{k}), \quad j = \overline{1, n-1}, \\ (c_n + k_n)(1 + k_n) &\equiv \tilde{G}_n(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) \equiv \tilde{G}_n(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

ნათელია, რომ ყველა ამ პოლინომის ხარისხია  $p_j=2$ .

შევადგინოთ კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა

$$(55) \quad \left[ \tilde{G}_j(\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_n) z_j^{-1} - G_j(\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_n) \right] u(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$n=1$  შემთხვევაში (53) ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$[(c + \delta)(1 + \delta) z^{-1} - (a + \delta)(b + \delta)] u(z) = 0$$

და, მაშასადამე, ემთხვევა გაუსის განტოლებას ჰგ მწკრივისათვის. ამრიგად, ამ შემთხვევაში თეორემა მართებულია. შევნიშნოთ, რომ თუ  $n=2$ , (53) (და (55)) ფორმულები ემთხვევა კერძო წარმოებულებიან განტოლებათა სისტემას აპელის  $F_2$  ფუნქციისათვის (იხ., მაგ., [60], 5.9(10))

$$\begin{aligned} [(c + \delta_1)(1 + \delta_1) z_1^{-1} - (a + \delta_1 + \delta_2)(b_1 + \delta_1)] u(z_1, z_2) &= 0, \\ [(c_2 + \delta_2)(1 + \delta_2) z_2^{-1} - (a + \delta_1 + \delta_2)(b_2 + \delta_2)] u(z_1, z_2) &= 0. \end{aligned}$$

რომლის ამონახსნსაც აქვს (50') მწკრივის სახე (სიმპლექსზე  $|z_1| + |z_2| < 1$ ). მაშასადამე, თეორემა მართებულია ამ შემთხვევაშიც.

(50) განმარტების გათვალისწინებით, გარდავქმნათ (55) ფორმულის მარცხენა მხარე. პირველ  $n-1$  გამოსახულებაში გვექნება

$$\begin{aligned} &\left[ (c + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})(1 + \delta_j) z_j^{-1} - (\delta_n - k_n + a + k_n + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})(b_j + \delta_j) \right] F\left(a; \begin{matrix} \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}} \\ c \end{matrix}; \begin{matrix} b_n, z_n \\ c_n \end{matrix}\right) = \\ &= \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n}}{(c_n)_{k_n}} \left\{ \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} \left[ \left( c + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \right) (1 + \delta_j) z_j^{-1} - \left( a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \right) (b_j + \delta_j) \right] F\left( a + k_n; \begin{matrix} \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}} \\ c \end{matrix}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \left[ (\delta_n - k_n) \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} \right] (b_j + \delta_j) F\left( a + k_n; \begin{matrix} \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1, n-1}} \\ c \end{matrix}\right) \right\}. \end{aligned}$$

გავითვალისწინოთ, რომ (იხ. [62], თავი VII, §39)

$$\left[ \left( c + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \right) (1 + \delta_j) z_j^{-1} - \left( a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \right) (b_j + \delta_j) \right] F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$(\delta_n - k_n) z_n^{k_n} = 0,$$

ე.ი. (53) სისტემის პირველი  $n-1$  განტოლება კმაყოფილდება.

ამ სისტემის ბოლო განტოლების მარცხენა მხარეში გვაქვს

$$\begin{aligned} & \left[ (c_n + \delta_n)(1 + \delta_n) z_n^{-1} - (\delta_n - k_n + a + k_n + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})(b_n + \delta_n) \right] F \left( \begin{matrix} \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \\ c \end{matrix}; \begin{matrix} b_n, z_n \\ c_n \end{matrix} \right) = \\ & = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n}}{(c_n)_{k_n}} \left\{ \left[ (c_n + \delta_n)(1 + \delta_n) z_n^{-1} - (\delta_n - k_n)(b_n + \delta_n) \right] \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) - \right. \\ & \quad \left. - (b_n + \delta_n) \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} (a + k_n + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}) F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) \right\} = \\ & = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n}}{(c_n)_{k_n}} \left[ (c_n + k_n - 1) \frac{z_n^{k_n-1}}{(k_n-1)!} - (b_n + k_n) \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} (a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i) \right] F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) = \\ & = \left[ \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n}}{(c_n)_{k_n-1}} \frac{z_n^{k_n-1}}{(k_n-1)!} - \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n+1}}{(c_n)_{k_n}} \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} (a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i) \right] F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) = \\ & = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n+1} (b_n)_{k_n+1}}{(c_n)_{k_n}} \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} \left\{ F \left( \begin{matrix} a+1+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) - \frac{a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i}{a + k_n} F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) \right\} = \\ & = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_n} (b_n)_{k_n+1}}{(c_n)_{k_n}} \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} \left\{ (a + k_n) F \left( \begin{matrix} a+1+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) - (a + k_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i) F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

აქ ფიგურულ ფრჩხილებში მდგარი გამოსახულება  $=0$ , ვინაიდან, (42) ფორმულის თანახმად, გვაქვს

$$\begin{aligned} & (a + k_n) F \left( \begin{matrix} a+1+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right) = \\ & = (a + k_n) \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+k_n+k_1+\dots+k_{n-1})}{\Gamma(a+1+k_n)(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!} = \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+k_n+k_1+\dots+k_{n-1})}{\Gamma(a+k_n)(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!} = \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} (a + k_n + k_1 + \dots + k_{n-1}) \frac{(a + k_n)_{k_1+\dots+k_{n-1}}}{(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(b_j)_{k_j} z_j^{k_j}}{k_j!} = \\ & = (a + k_n + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}) F \left( \begin{matrix} a+k_n \\ c \end{matrix}; \{ \mathbf{b}, \mathbf{z} \}_{\overline{1, n-1}} \right), \end{aligned}$$

ე.ი. კმაყოფილდება (53) სისტემის ბოლო განტოლებაც. ■

მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ზემოთ მოყვანილი წარმოდგენებიდან გამომდინარეობს რამდენიმე სასარგებლო თანაფარდობა [46]:

1. ინტეგრალური წარმოდგენა (41) შეიძლება გამოვიყენოთ  $F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right)$  ფუნქციის გარდაქმნის თვისებების დასადგენად. კერძოდ, (41) ინტეგრალში შემდეგი ჩასმებით

$$\begin{aligned} u &= 1 - \tilde{u}, \\ u &= \frac{1 - \tilde{u}}{1 - z_j \tilde{u}} \quad (j = \overline{1, n}), \\ u &= \frac{\tilde{u}}{(1 - z_j) + z_j \tilde{u}} \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

ამ ფუნქციისათვის მივიღებთ  $2n+1$  თანაფარდობას (იხ. [62], 38(10)):

$$\begin{aligned} (56) \quad F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}}\right) &= \prod_{k=1}^n (1 - z_k)^{-b_k} F\left(\frac{c-a}{c}; b_1, \frac{z_1}{z_1-1}; \dots; b_n, \frac{z_n}{z_n-1}\right) = \\ &= (1 - z_j)^{c-a} \prod_{k=1}^n (1 - z_k)^{-b_k} F\left(\frac{c-a}{c}; b_1, \frac{z_j - z_1}{1 - z_1}; \dots; b_{j-1}, \frac{z_j - z_{j-1}}{1 - z_{j-1}}; c - b, z_j; b_{j+1}, \frac{z_j - z_{j+1}}{1 - z_{j+1}}; \dots; b_n, \frac{z_j - z_n}{1 - z_n}\right) = \\ &= (1 - z_j)^{-a} F\left(\frac{a}{c}; b_1, \frac{z_j - z_1}{z_j - 1}; \dots; b_{j-1}, \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - 1}; c - b, \frac{z_j}{z_j - 1}; b_{j+1}, \frac{z_j - z_{j+1}}{z_j - 1}; \dots; b_n, \frac{z_j - z_n}{z_j - 1}\right) \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

სადაც სიმარტივისათვის აღვნიშნეთ

$$b = b_1 + \dots + b_n.$$

ეს თანაფარდობები მიიღებს უფრო მოხერხებულ სახეს, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$1 - z_j = \tilde{z}_j, \quad z_j = 1 - \tilde{z}_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} (57) \quad F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{1-z}\}_{\overline{1,n}}\right) &= \prod_{k=1}^n z_k^{-b_k} F\left(\frac{c-a}{c}; b_1, 1 - \frac{1}{z_1}; \dots; b_j, 1 - \frac{1}{z_j}; \dots; b_n, 1 - \frac{1}{z_n}\right) = \\ &= z_j^{c-a} \prod_{k=1}^n z_k^{-b_k} F\left(\frac{c-a}{c}; b_1, 1 - \frac{z_j}{z_1}; \dots; b_{j-1}, 1 - \frac{z_j}{z_{j-1}}; c - b, 1 - z_j; b_{j+1}, 1 - \frac{z_j}{z_{j+1}}; \dots; b_n, 1 - \frac{z_j}{z_n}\right) = \\ &= z_j^{-a} F\left(\frac{a}{c}; b_1, 1 - \frac{z_1}{z_j}; \dots; b_{j-1}, 1 - \frac{z_{j-1}}{z_j}; c - b, 1 - \frac{1}{z_j}; b_{j+1}, 1 - \frac{z_{j+1}}{z_j}; \dots; b_n, 1 - \frac{z_n}{z_j}\right) \\ &\quad (b = b_1 + \dots + b_n; \quad j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

კერძოდ,  $n=2$  შემთხვევაში (57) გვაძლევს 5 თანაფარდობას აპელის ფუნქციისათვის

$$\begin{aligned} (57') \quad F_1(a; b_1, b_2, c; 1 - z_1; 1 - z_2) &= z_1^{-b_1} z_2^{-b_2} F_1\left(c - a; b_1, b_2, c; 1 - \frac{1}{z_1}; 1 - \frac{1}{z_2}\right) = \\ &= z_1^{c-a-b_1} z_2^{-b_2} F_1\left(c - a; c - b_1 - b_2, b_2, c; 1 - z_1; 1 - \frac{z_1}{z_2}\right) = z_1^{-b_1} z_2^{c-a-b_2} F_1\left(c - a; b_1, c - b_1 - b_2, c; 1 - \frac{z_2}{z_1}; 1 - z_2\right) = \\ &= z_1^{-a} F_1\left(a; c - b_1 - b_2, b_2, c; 1 - \frac{1}{z_1}; 1 - \frac{z_2}{z_1}\right) = z_2^{-a} F_1\left(a; b_1, c - b_1 - b_2, c; 1 - \frac{z_1}{z_2}; 1 - \frac{1}{z_2}\right). \end{aligned}$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ (56)-(57') ფორმულები აზოგადებს გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის ცნობილ კუმერის თანაფარდობებს (იხ., მაგ., [60], 2.9(1-4)), კერძოდ, (17) ფორმულას.

2. (41) ინტეგრალური წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(58) \quad \frac{\partial^l}{\partial z_j^l} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) = \frac{\Gamma(c)(b_j)_l}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a+l-1}(1-u)^{c-a-1}(1-z_j u)^{-b_j-l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (1-z_k u)^{-b_k} du = \\ = \frac{(a)_l (b_j)_l}{(c)_l} F\left(\begin{matrix} a+l \\ c+l \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+l, z_j; \dots; b_n, z_n\right),$$

$$(59) \quad \prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial z_j^{l_j}} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) = F\left(\begin{matrix} a+l \\ c+l \end{matrix}; b_1+l_1, z_1; \dots; b_n+l_n, z_n\right) \frac{\Gamma(a+l)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+l)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(b_j+l_j)}{\Gamma(b_j)} \\ (l = l_1 + \dots + l_n, \quad l_j = 0, 1, 2, \dots, \quad j = \overline{1, n}).$$

კერძოდ,  $n=2$  შემთხვევაში (59) გვაძლევს (იხ. [62], §IV, (19))

$$(59') \quad \frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial z_1^{l_1} \partial z_2^{l_2}} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2\right) = (b_1)_{l_1} (b_2)_{l_2} \frac{(a)_{l_1+l_2}}{(c)_{l_1+l_2}} F\left(\begin{matrix} a+l_1+l_2 \\ c+l_1+l_2 \end{matrix}; b_1+l_1, z_1; b_2+l_2, z_2\right),$$

ხოლო  $n=1$  შემთხვევაში ვღებულობთ (20) ფორმულას გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის.

3. (42) მწკრივის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები (ქვემოთ აღნიშნულია  $b \equiv b_1 + \dots + b_n$ )

$$(60) \quad \left(a + \sum_{j=1}^n \delta_j\right) F = a F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right);$$

$$(61) \quad \left(c-1 + \sum_{j=1}^n \delta_j\right) F = (c-1) F\left(\begin{matrix} a \\ c-1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right);$$

$$(62) \quad \left(c-a - \sum_{j=1}^n [b_j z_j - (1-z_j)\delta_j]\right) F = (c-a) F\left(\begin{matrix} a-1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right);$$

$$(63) \quad \left(c-a-b + \sum_{j=1}^n (z_j^{-1}-1)\delta_j\right) F = c^{-1}(c-a)(c-b) F\left(\begin{matrix} a \\ c+1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right);$$

$$(64) \quad (\delta_l + b_l) F = b_l F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_l+1, z_l; \dots; b_n, z_n\right), \quad l = \overline{1, n};$$

$$(65) \quad \left[c-b-a z_l + z_l \sum_{j=1}^n (z_j^{-1}-1)\delta_j\right] F = (c-b) F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_l-1, z_l; \dots; b_n, z_n\right), \quad l = \overline{1, n}.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ ნებისმიერი ანალიზური  $f(z)$  ფუნქციისათვის

$$(\delta + \lambda)(\delta + \lambda + 1)\dots(\delta + \lambda + l - 1)f(z) = z^{-\lambda} d^l / dz^l [z^{\lambda+l-1} f(z)], \quad l = 1, 2, \dots,$$

(ეს თანაფარდობა ადვილად მოწმდება ინტეგრაციით), (64) ფორმულიდან ვპოულობთ

$$(66) \quad \frac{\partial^l}{\partial z_j^l} \left[ z_j^{b_j+l-1} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j, z_j; \dots; b_n, z_n\right) \right] = (b_j)_l z_j^{b_j-1} F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+l, z_j; \dots; b_n, z_n\right).$$

ფორმულა (66) აზოგადებს  $n=1$  შემთხვევაში გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის ცნობილ (იხ., მაგ., [60], 2.8(21)) თანაფარდობებს

$$d^l / dz^l [z^{b+l-1} F(a, b; c; z)] = (b)_l z^{b-1} F(a, b+l; c; z), \quad d^l / dz^l [z^{a+l-1} F(a, b; c; z)] = (a)_l z^{a-1} F(a+l, b; c; z),$$

ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში გვაძლევს შესაბამის თანაფარდობებს აპელის ჰგ ფუნქციისათვის:

$$(66') \quad \begin{aligned} \partial^l / \partial z_1^l [z_1^{b_1+l-1} F(a, b_1, b_2, c; z_1, z_2)] &= (b_1)_l z_1^{b_1-1} F(a, b_1+l, b_2, c; z_1, z_2), \\ \partial^l / \partial z_2^l [z_2^{b_2+l-1} F(a, b_1, b_2, c; z_1, z_2)] &= (b_2)_l z_2^{b_2-1} F(a, b_1, b_2+l, c; z_1, z_2). \end{aligned}$$

**განმარტება.** გაუსის და აპელის ჰგ ფუნქციების ანალოგიურად,  $n$  ცვლადის ორ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას, რომელთა პარამეტრებია, შესაბამისად,  $a, a', b_1, b'_1, \dots, b_n, b'_n, c, c'$ , ვუწოდოთ ერთმანეთის ასოციირებული, თუ

$$(67) \quad a - a' = l, \quad b_1 - b'_1 = k_1, \quad \dots, \quad b_n - b'_n = k_n, \quad c - c' = m,$$

სადაც  $l, k_j, (j = \overline{1, n})$  და  $m$  არის ნებისმიერი მთელი (დადებითი ან უარყოფითი) რიცხვები. ამ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს ვუწოდოთ ერთმანეთის მოსაზღვრე, თუ  $l, k_j, (j = \overline{1, n})$  და  $m$  რიცხვებიდან მხოლოდ რომელიმე ერთი  $= \pm 1$ , დანარჩენები კი ნულის ტოლია.

4. (60)-(65) ფორმულები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც  $2n+4$  წრფივი განტოლების სისტემა, სადაც უცნობებია  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციის წარმოებულები  $\delta_j F, j = \overline{1, n}$ . ამ სისტემიდან ჰგ ფუნქციის წარმოებულების შემცველი შესაკრებების გამორიცხვით ვპოულობთ წრფივ თანაფარდობებს ჰგ  $F$  ფუნქციასა და მის მოსაზღვრე ფუნქციებს შორის:

$$(68_1) \quad (a-b)F - aF \left( \begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right) + \sum_{j=1}^n b_j F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = 0;$$

$$(68_2) \quad (c-a-b)F - (c-a)F \left( \begin{matrix} a-1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right) + \sum_{j=1}^n (1-z_j) b_j F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = 0;$$

$$(68_3) \quad c \left( c-a - \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j \right) F - (c-a)(c-b)F \left( \begin{matrix} a \\ c+1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right) + c \sum_{j=1}^n (z_j^{-1} - 1) b_j F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = 0;$$

$$(68_4) \quad (c-b-1)F - (c-1)F \left( \begin{matrix} a \\ c-1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right) + \sum_{j=1}^n b_j F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = 0;$$

$$(68_5) \quad \left[ z_l \left( b-a - \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j \right) + c-b \right] F - (c-b)F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_l-1, z_l; \dots; b_n, z_n \right) + z_l \sum_{j=1}^n (z_j^{-1} - 1) b_j F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = 0, \quad l = \overline{1, n}.$$

ამ ფორმულებიდან  $n=1$  შემთხვევაში მიიღება გაუსის 15 ცნობილი თანაფარდობა (იხ., მაგ., [60], 2.8(31)-2.8(45)), ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში (68) გვაძლევს თანაფარდობებს აპელის ფუნქციისათვის, რომელთაგან ზოგიერთი მოცემულია მონოგრაფიაში [62] (იხ. [62], §IV, გვ. 20).

(68) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

**თეორემა 5.**  $\square^n$  სივრცის ყოველ  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  წერტილში ლაურიხელას ჰგ ფუნქცია  $F$  და მისი მოსაზღვრე  $2(n+2)$  ფუნქციიდან

$$F \left( \begin{matrix} a \pm 1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right), F \left( \begin{matrix} a \\ c \pm 1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n \right), F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1 \pm 1, z_1; \dots; b_n, z_n \right), \dots, F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n \pm 1, z_n \right)$$

$n+1$  დაკავშირებულია წრფივი თანაფარდობებით, რომელთა შესაკრებებს შორის არანაკლებ  $n-2$  შეიცავს ფუნქციებს  $F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+1, z_1; \dots; b_n, z_n \right), \dots, F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_l, z_l; \dots; b_n+1, z_n \right)$ . ამ თანაფარდობების

კოეფიციენტები რაციონალურია  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრებისა და  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  წერტილის კოორდინატების მიმართ და მათ შორის ზოგიერთი შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს.



ასეთი თანაფარდობის მაგალითია ფორმულა

$$(69) \quad aF\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_l+1, z_l; \dots; b_n, z_n\right) + (b-a)F = \sum_{j=1}^n b_j F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n\right) \\ (b \equiv b_1 + \dots + b_n),$$

რომლის კერძო შემთხვევებია გაუსის ფორმულა (იხ., მაგ., [60], 2.8(32)):

$$aF\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z\right) - (a-b_1)F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z\right) = b_1 F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+1, z\right)$$

და ფორმულა, მოყვანილი მონოგრაფიაში [62] (იხ. §IV, გვ. 20) აპელის ფუნქციისათვის:

$$aF\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2\right) - (a-b_1-b_2)F = b_1 F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+1, z_1; b_2, z_2\right) + b_2 F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2+1, z_2\right).$$

**დამტკიცება** და მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციების დამაკავშირებელი თანაფარდობების სრული ჩამონათვალი მოცემულია დამატებაში A 6. ■

**შენიშვნა.** ლაურიხელას  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის არსებობს

$$N(n) = (n+2)[(n+1)(n+1/2)+2], \quad n = 1, 2, \dots$$

ასეთი თანაფარდობა (იხ. დამატება A 6). ადვილად ვპოულობთ თანაფარდობათა რაოდენობას  $N(1)=15$  გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის და  $N(2)=38$  აპელის ჰგ ფუნქციისათვის.

**შედეგი 7.** მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციები, ასოცირებული ლაურიხელას (41) ფუნქციასთან, გამოისახება ამ ფუნქციისა და მისი მოსაზღვრე ფუნქციების წრფივი კომბინაციებით, რომელთა კოეფიციენტებია  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრების და  $z_1, \dots, z_n$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციები.

**დამტკიცება.** როცა (67) ფორმულაში ყველა  $l, k_j, (j=\overline{1, n})$  და  $m$  მთელი რიცხვის მოდული  $\leq 1$ , წინადადება სამართლიანია 4.5 თეორემის ძალით. დაუშვათ, წინადადება სამართლიანია, როცა

$$\max\{|l|, |k_j|, |m| \mid j=\overline{1, n}\} \leq N, \quad N \geq 2.$$

მაშინ

$$(70) \quad F\left(\begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix}; b'_1, z_1; \dots; b'_n, z_n\right) = R_0 F + R_a^+ F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + R_a^- F\left(\begin{matrix} a-1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \\ + R_c^+ F\left(\begin{matrix} a \\ c+1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + R_c^- F\left(\begin{matrix} a \\ c-1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \\ + \sum_{j=1}^n R_j^+ F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n\right) + \sum_{j=1}^n R_j^- F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j-1, z_j; \dots; b_n, z_n\right),$$

სადაც  $R_0, R_a^\pm, R_c^\pm, R_j^\pm, (j=\overline{1, n})$ , კოეფიციენტები  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრების და  $z_1, \dots, z_n$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციებია. შევცვალოთ (70) ფორმულაში  $a \rightarrow a+1$ . გვექნება:

$$(71) \quad F\left(\begin{matrix} a+1+l \\ c' \end{matrix}; b'_1, z_1; \dots; b'_n, z_n\right) = \tilde{R}_0 F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \tilde{R}_a^+ F\left(\begin{matrix} a+2 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \\ + \tilde{R}_a^- F\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \tilde{R}_c^+ F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c+1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \tilde{R}_c^- F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c-1 \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_n, z_n\right) + \\ + \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j^+ F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+1, z_j; \dots; b_n, z_n\right) + \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j^- F\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j-1, z_j; \dots; b_n, z_n\right).$$

აქ  $\tilde{R}_a^\pm, \tilde{R}_c^\pm, \tilde{R}_j^\pm$  არის  $a, b_j, c, z_j$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციები, რომლებშიც გადაისახება  $R_a^\pm, R_c^\pm, R_j^\pm, (j=\overline{1,n})$  ფუნქციები  $a \rightarrow a+1$  შეცვლის შედეგად.

ინტეგრირული დაშვების ძალით, ყველა ჰგ ფუნქცია (71) ფორმულის მარჯვენა მხარეში გამოისახება  $F$  ჰგ ფუნქციისა და მისი მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციების წრფივი კომბინაციებით, რომელთა კოეფიციენტები არის  $a, b_j, c, z_j, (j=\overline{1,n})$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციები. შედეგად, (71) ფორმულის მარჯვენა მხარეს ექნება ისეთი სახე, როგორც წინადადებაშია ჩამოყალიბებული. მსგავსადვე მტკიცდება წინადადების სამართლიანობა, როდესაც ვახდენთ შეცვლას  $a \rightarrow a-1, |b| \rightarrow |b|+1, |c| \rightarrow |c|+1$ . ■

**შედეგი 8.** ნებისმიერი მთელი  $m$  და ნატურალური  $l$  რიცხვებისათვის წარმოებულები  $\frac{\partial^l}{\partial z_j^l} \left[ z_j^m F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j, z_j; \dots; b_n, z_n \right) \right], (j=\overline{1,n})$ , გამოისახება  $F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_{\overline{1,n}} \right)$  ფუნქციისა და მისი მოსაზღვრე ფუნქციების ისეთი წრფივი კომბინაციებით, რომელთა კოეფიციენტებია  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრების და  $z_1, \dots, z_n$  ცვლადების რაციონალური ფუნქციები.

**დამტკიცება** ემყარება ლაიბნიცის ფორმულას და (58) თანაფარდობას:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial z_j^l} \left[ z_j^m F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j, z_j; \dots; b_n, z_n \right) \right] &= \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} \left( \frac{\partial^{l-k}}{\partial z_j^{l-k}} z_j^m \right) \frac{\partial^k}{\partial z_j^k} F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j, z_j; \dots; b_n, z_n \right) = \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-l+k)} z_j^{m-l+k} \frac{(a)_k (b_j)_k}{(c)_k} F \left( \begin{matrix} a+k \\ c+k \end{matrix}; b_1, z_1; \dots; b_j+k, z_j; \dots; b_n, z_n \right). \end{aligned}$$

აქედან წინადადებაში ჩამოყალიბებული დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს ჯამის თითოეულ შესაკრებში 4.7 შედეგის გათვალისწინებით. ■

5. ინტეგრალური (41) წარმოდგენიდან ადვილად ვპოულობთ თანაფარდობებს

$$(72) \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}, z_{n-1}; b_n, 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)} F \left( \begin{matrix} a \\ c-b_n \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}, z_{n-1} \right),$$

(Re(c-a-b\_n) > 0)

$$(73) \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}, z_{n-1}; b_n, z_{n-1} \right) = F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}+b_n, z_{n-1} \right).$$

$$(74) \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}, z_{n-1}; b_n, 0 \right) = F \left( \begin{matrix} a-b_n \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_2; \dots; b_{n-1}, z_{n-1} \right),$$

კერძოდ,  $n=2$  შემთხვევაში გვაქვს (იხ., მაგ., [60], 5.10(10)):

$$(72') \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_2)} F \left( \begin{matrix} a \\ c-b_2 \end{matrix}; b_1, z_1 \right), \quad (\text{Re}(c-a-b_2) > 0)$$

$$(73') \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, z_1; b_2, z_1 \right) = F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+b_2, z_1 \right).$$

შევნიშნოთ, რომ (74) ფორმულიდან, თანახმად (11<sub>1,2</sub>) ფორმულებისა, გვაქვს

$$(75) \quad F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, 1; b_2, 1; \dots; b_n, 1 \right) = F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+b_2+\dots+b_n, 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-\dots-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-\dots-b_n)},$$

$$F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1, 0; \dots; b_n, 0 \right) = F \left( \begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; b_1+\dots+b_n, 0 \right) = 1.$$

ცხადია, ეს შედეგებიც აზოგადებს შესაბამის თანაფარდობებს, რომლებიც გვქონდა გაუხის და აპელის ჰგ ფუნქციებისათვის.

### §4.4. $n \geq 3$ ცვლადის შემთხვევა

თანახმად ზემოთ თქმულისა, როდესაც  $n \geq 3$ , ინტეგრალები (4) დაიყვანება  $n-1$  ცვლადის ჰგ ფუნქციებზე, რომელთა არგუმენტებს შორის არის არაწრფივი თანაფარდობები. მართლაც, (4) ფორმულაში მოვახდინოთ ჩასმა

$$u = \tilde{u}, \quad j=1; \quad u = 1 - \tilde{u} \left(1 - x_{j-1}/x_j\right), \quad j = \overline{2, n}.$$

მივიღებთ

$$(76) \quad B_n = \det^{-1} [x_j^{i-1}] \det [x_j^{i-1} \tilde{b}_{ij}]_{i, j = \overline{1, n}},$$

სადაც

$$(77_1) \quad \tilde{b}_{i1} = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{x_1}{x_k}\right)^{1-r_k} \int_0^1 \tilde{u}^{r_0+i-2} (1-\tilde{u})^{r_1-1} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{x_1}{x_k} \tilde{u}\right)^{r_k-1} d\tilde{u},$$

$$(77_j) \quad \tilde{b}_{ij} = \left(1 - \frac{x_{j-1}}{x_j}\right)^{r_j} \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{x_{j-1}}{x_j}\right) \tilde{u}\right]^{r_0+i-2} \tilde{u}^{r_j-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(1 - \frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_k} \tilde{u}\right)^{r_k-1} d\tilde{u}, \quad j=2, 3, \dots$$

( $x_0=0; i=\overline{1, n}$ )

(77) ინტეგრალები კრებადია, თუ შესრულებულია პირობები

$$r_0 > 0, \quad r_j > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

მაშინ, (41) ინტეგრალური წარმოდგენის გათვალისწინებით, გვაქვს

$$(78_1) \quad \tilde{b}_{i1} = \frac{\Gamma(r_0+i-1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1+i-1)} F\left(\begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{1-r_k, \frac{x_1}{x_k}\right\}_{\overline{2, n}}\right) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{x_1}{x_k}\right)^{1-r_k},$$

$$(78_j) \quad \tilde{b}_{ij} = \frac{\Gamma(r_j)\Gamma(r_{j-1})}{\Gamma(r_j+r_{j-1})} F\left(\begin{matrix} r_j \\ r_j+r_{j-1} \end{matrix}; 2-r_0-i, 1-\frac{x_{j-1}}{x_j}; \left\{1-r_k, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k} \mid \begin{matrix} k=\overline{1, n}, \\ k \neq j, j-1 \end{matrix}\right\}\right) \left(1 - \frac{x_{j-1}}{x_j}\right)^{r_j}.$$

(76) ფორმულაში შეტანის და რიგი გამარტივების შემდეგ  $n \geq 2$  შემთხვევაში ვღებულობთ

$$(79) \quad B_n(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (z_j - z_k)^{-1} \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right)} \prod_{j=2}^n \left[ \left(1 - \frac{z_{j-1}}{z_j}\right) \left(\frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_1}\right)^{r_j-1} \right] D_{n-1}(\mathbf{z}). \quad (z_n=1; n \geq 2)$$

სადაც აღვნიშნეთ

$$(80) \quad D_{n-1}(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(r_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(r_j + r_{j-1})} \mathcal{F}_{n-1}(\mathbf{z}),$$

$$(81) \quad \mathcal{F}_{n-1}(\mathbf{z}) = \det \left[ \begin{array}{c} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0+r_1)_{i-1}} z_1^{i-1} F\left(\begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{1-r_k, \frac{x_1}{x_k}\right\}_{\overline{2, n}}\right) \\ z_j^{i-1} F\left(\begin{matrix} r_j \\ r_{j-1}+r_j \end{matrix}; 2-r_0-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; \left\{1-r_k, 1-\frac{z_k-z_{j-1}}{z_k-z_j} \mid \begin{matrix} k=\overline{1, n} \\ k \neq j, j-1 \end{matrix}\right\}\right) \end{array} \right]_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{2, n}}}, \quad (z_n=1; n \geq 2)$$

$$z_k = \frac{x_k}{x_n}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

შეგნიშნოთ, რომ (79)-(81) ფორმულები  $n=2$  შემთხვევაში გვაძლევს (8) და (9) ფორმულებს, ხოლო  $n=1$  შემთხვევაში გვაქვს  $D_0(\mathbf{z})=1$  და (79) დაიყვანება (3) თანაფარდობაზე.

(81) დეტერმინანტის გასამარტივებლად გამოვითვალოთ  $\mathcal{F}_{n-1}(\mathbf{z})|_{z_1=0}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n-1}(\mathbf{z})|_{z_1=0} &= \det \left[ \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_1+r_0+i-2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_1+r_2+r_0+i-2)} z_2^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_2 \\ r_1+r_2+r_0+i-2 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_2}{z_2-z_k} \right\}_{\overline{3,n}} \right) \right] \\ &= \left( \prod_{j=2}^n z_j \right) \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)} \det \left[ z_j^{i-2} F \left( \begin{matrix} r_j \\ r_{j-1}+r_j \end{matrix}; 3-r_0-r_1-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; \left\{ 1-r_k, 1-\frac{z_k-z_{j-1}}{z_k-z_j} \right\}_{\overline{2,n}} \right) \right]_{j=3,n} \\ &= \left( \prod_{j=2}^n z_j \right) \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)} \det \left[ \frac{(r_0+r_1)_{i-2}}{(r_0+r_1+r_2)_{i-2}} z_2^{i-2} F \left( \begin{matrix} r_2 \\ r_1+r_2+r_0+i-2 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_2}{z_2-z_k} \right\}_{\overline{3,n}} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[ z_j^{i-2} F \left( \begin{matrix} r_j \\ r_{j-1}+r_j \end{matrix}; 3-r_0-r_1-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; \left\{ 1-r_k, 1-\frac{z_k-z_{j-1}}{z_k-z_j} \right\}_{\overline{2,n}} \right) \right]_{j=3,n} \\ &\quad (\operatorname{Re}(r_0+r_1) > 0, \operatorname{Re} r_2 > 0; z_n = 1) \end{aligned}$$

მიღებულ ფორმულებში შევცვალოთ აღნიშვნები:  $r_1+r_0 = \tilde{r}_0$ ;  $r_j = \tilde{r}_{j-1}$ ,  $z_j = \tilde{z}_{j-1}$ ,  $j = \overline{2,n}$ . რიგი გარდაქმნებისა და გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ:

$$D_{n-1}(\mathbf{z})|_{z_1=0} = \tilde{z}_1 \prod_{k=2}^{n-1} \tilde{z}_k \left( \frac{\tilde{z}_k}{\tilde{z}_k - \tilde{z}_1} \right)^{\tilde{r}_{k-1}} D_{n-2}(\tilde{\mathbf{z}}), \quad (\tilde{z}_{n-1} = 1)$$

სადაც, (80), (81) ფორმულების ანალოგიურად,

$$(80') \quad D_{n-2}(\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{r}_j\right) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(\tilde{r}_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(\tilde{r}_j + \tilde{r}_{j-1})} \mathcal{F}_{n-2}(\tilde{\mathbf{z}}),$$

$$(81') \quad \mathcal{F}_{n-2}(\tilde{\mathbf{z}}) = \det \left[ \frac{(\tilde{r}_0)_{i-1}}{(\tilde{r}_0 + \tilde{r}_1)_{i-1}} \tilde{z}_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} \tilde{r}_0+i-1 \\ \tilde{r}_1 + \tilde{r}_0 + i-1 \end{matrix}; \left\{ 1-\tilde{r}_k, \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_k} \right\}_{\overline{2,n-1}} \right) \right] \\ \cdot \left[ \tilde{z}_j^{i-1} F \left( \begin{matrix} \tilde{r}_j \\ \tilde{r}_{j-1} + \tilde{r}_j \end{matrix}; 2-\tilde{r}_0-i, 1-\frac{\tilde{z}_{j-1}}{\tilde{z}_j}; \left\{ 1-\tilde{r}_k, 1-\frac{\tilde{z}_k - \tilde{z}_{j-1}}{\tilde{z}_k - \tilde{z}_j} \right\}_{\overline{2,n-1}} \right) \right]_{j=2,n-1} \\ (\tilde{z}_{n-1} = 1; n \geq 3)$$

ამ ახალ აღნიშვნებში გვექნება:

$$(82) \quad B_n(\mathbf{z})|_{z_1=0} = \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right)} \prod_{j=2}^{n-1} \tilde{z}_j^{-1} \left( \frac{\tilde{z}_j - \tilde{z}_{j-1}}{\tilde{z}_j - \tilde{z}_1} \right)^{\tilde{r}_j} \prod_{2 \leq k < j \leq n-1} (\tilde{z}_j - \tilde{z}_k)^{-1} D_{n-2}(\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{\Gamma(r_n) \Gamma\left(\sum_{j=0}^{n-1} r_j\right)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right)} B_{n-1}(\tilde{\mathbf{z}})$$

ამრიგად, (2) ფორმულის ინტუქციით დამტკიცებისათვის საკმარისია ვახევნოთ, რომ  $B_n(\mathbf{z}) = B_n(\mathbf{z})|_{z_1=0}$ , ანუ, რომ სამართლიანია

**თეორემა 6.** ფუნქცია  $B_n(\mathbf{z})$  არ არის დამოკიდებული  $z_1$  ცვლადზე, თუ  $\operatorname{Re} r_j > 0$ ,  $j = \overline{0,n}$ :

$$(83) \quad \frac{\partial}{\partial z_1} B_n(\mathbf{z}) = 0. \quad (\operatorname{Re} r_j > 0, j = \overline{0,n}, n = 3, 4, \dots)$$

ცხადია, ეს თეორემა არის 4.1 თეორემის მრავალგანზომილებიანი განზოგადება.

ისევე, როგორც §4.1-ში, შესაძლებელია გამოვიყენოთ (81) დეტერმინანტის რეგულარული ნაწილი. ამისათვის მეორე სტრიქონში გამოვიყენოთ ფორმულა (49):

$$\begin{aligned}
 & F \left( \begin{matrix} r_2 \\ r_1+r_2 \end{matrix}; 2-r_0-i, 1-\frac{z_1}{z_2}; \left\{ 1-r_k, 1-\frac{z_k-z_{j-1}}{z_k-z_j} \middle| k=\overline{3,n} \right\} \right) = \\
 (84) \quad & = A_i F \left( \begin{matrix} 2-r_0-i, z_1/z_2; \\ r_2; \\ 3-r_0-r_1-i \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, (z_1-z_2)/(z_k-z_2) \middle| k=\overline{3,n} \right\} \right) + \\
 & + \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{r_0+r_1+i-2} B_i F \left( \begin{matrix} r_0+r_1+r_2+i-2; \\ r_1, z_1/z_2; \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, (z_1-z_2)/(z_k-z_2) \middle| k=\overline{3,n} \right\} \right).
 \end{aligned}$$

აქ კოეფიციენტები  $A_i$  და  $B_i$ ,  $i=\overline{1,n}$ , განისაზღვრება ფორმულებით

$$(85) \quad A_i = \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_1+r_0+i-2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_1+r_2+r_0+i-2)}, \quad B_i = \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(2-r_0-r_1-i)}{\Gamma(r_2)\Gamma(2-r_0-i)},$$

ხოლო მარჯვენა მხარეში შემავალი ფუნქციები არის აპელის  $F_2$  ფუნქციის განზოგადება (იხ. ფ-ლა (50)).

შედგად, მივიღებთ:

$$(86) \quad D_{n-1}(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(r_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(r_j+r_{j-1})} \left\{ \mathcal{F}_{n-1}^{reg}(z_1) + \mathcal{F}_{n-1}^{sing}(z_1) \right\},$$

სადაც

$$(87) \quad \mathcal{F}_{n-1}^{reg}(z_1) = \det \left[ \begin{array}{c} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0+r_1)_{i-1}} z_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_1}{z_k} \right\}_{\overline{2,n}} \right) \\ A_i z_2^{i-1} F \left( \begin{matrix} 2-r_0-i, z_1/z_2; \\ r_2; \\ 3-r_0-r_1-i \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, (z_1-z_2)/(z_k-z_2) \right\}_{\overline{3,n}} \right) \\ z_j^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_j \\ r_{j-1}+r_j \end{matrix}; 2-r_0-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_j-z_{j-1}}{z_j-z_k} \middle| k=\overline{1,n} \right. \right. \\ \left. \left. \middle| k \neq j, j-1 \right\} \right) \end{array} \right]_{j=\overline{3,n}}^{i=\overline{1,n}},$$

$$(88) \quad \mathcal{F}_{n-1}^{sing}(z_1) = \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{r_0+r_1-1} \det \left[ \begin{array}{c} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0+r_1)_{i-1}} z_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_1}{z_k} \right\}_{\overline{2,n}} \right) \\ B_i z_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_0+r_1+r_2+i-2; \\ r_1, z_1/z_2; \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{ 1-r_k, (z_1-z_2)/(z_k-z_2) \right\}_{\overline{3,n}} \right) \\ z_j^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_j \\ r_{j-1}+r_j \end{matrix}; 2-r_0-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; \left\{ 1-r_k, \frac{z_j-z_{j-1}}{z_j-z_k} \middle| k=\overline{1,n} \right. \right. \\ \left. \left. \middle| k \neq j, j-1 \right\} \right) \end{array} \right]_{j=\overline{3,n}}^{i=\overline{1,n}}.$$

( $z_n=1$ )

ნაშრომში [46] ნახვენებია, რომ სამართლიანია შემდეგი

**წინადადება 2.** წერტილში  $z_1=0$  არსებობს  $\mathcal{F}_{n-1}^{reg}(z_1)$  ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმოებული  $z_1$  ცვლადით, ანუ  $z_1=0$  არის (87) დეტერმინანტის წესიერი წერტილი, ხოლო (88) დეტერმინანტის მეორე სტრიქონში მდგარი ჰგ ფუნქციებისათვის, ე.ი.  $\mathcal{F}_{n-1}^{sing}(z_1)$  ფუნქციისათვის  $z_1=0$  არის განსაკუთრებული წერტილი.

კერძოდ,  $n=3$  შემთხვევაში საკმაოდ შრომატევადი გამოთვლების შედეგად ვპოულობთ (89)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial \zeta^l} \mathcal{F}_2^{reg} \Big|_{\zeta=0} &= \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ (l_1+l_2=l)}} \frac{l!}{l_1! l_2! (l-l_1-l_2)!} \det \begin{bmatrix} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} \frac{l_1!}{(l_1-i+1)!} \frac{\partial^{l_1-i+1}}{\partial \zeta^{l_1-i+1}} F \left( \begin{matrix} a+i-1 \\ c+i-1 \end{matrix}; b_2, \frac{\zeta}{z_2}; b_3, \frac{\zeta}{z_3} \right) \Big|_{\zeta=0} \\ A_i z_2^{i-1} \frac{\partial^{l_2}}{\partial \zeta^{l_2}} F \left( \begin{matrix} 1-b_2; & 2-a-i, \zeta/z_2; & b_3, \frac{z_2-\zeta}{z_2-1} \\ & 3-c-i & c-b_2+i-1 \end{matrix} \right) \Big|_{\zeta=0} \\ \frac{\partial^{l-l_1-l_2}}{\partial \zeta^{l-l_1-l_2}} F \left( \begin{matrix} 1-b_3 \\ 2-b_2-b_3 \end{matrix}; 2-a-i, 1-z_2; 1-c+a, \frac{1-z_2}{1-\zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} \end{bmatrix}_{i=\overline{1,3}} = \\ = \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \\ (l_1+l_2+l_3=l)}} \det \begin{bmatrix} \frac{l! \Gamma(c-1)}{\Gamma(c-b_2)} \frac{\Gamma(c-a-b_2-1)}{\Gamma(c-a)} \frac{(a)_{l_1}}{(c)_{l_1}} \sum_{m=0}^{l_1} z_2^{-m} \frac{(b_2)_m (b_3)_{l_1-i+1-m}}{m! (l_1-m-i+1)!} \\ \frac{(c-1)_{i-1}}{(c-b_2)_{i-1}} \sum_{m=0}^{l_2} \frac{(1-z_2)^{1-b_2} (1-b_2)_{l_2} (2-a-i)_{l_2-m} (b_3)_m z_2^{-(l_2-m-i+1)}}{m! (l_2-m)! (c-b_2+i-1)_m (3-c-i)_{l_2-m}} F \left( \begin{matrix} c-b_2-b_3+i-1 \\ c-b_2+i-1+m \end{matrix}; 1-b_2+m, z_2 \right) \\ \sum_{\substack{q_1, \dots, q_p \\ q_k \in \mathcal{R}(l_3)}} \frac{(1-z_2)^q}{q_1! \dots q_p!} \frac{(1-b_3)_q (3-c-i)_q}{(2-b_2-b_3)_q} F \left( \begin{matrix} 1-b_3+q \\ 2-b_2-b_3+q \end{matrix}; 3-c-i+q, 1-z_2 \right) \end{bmatrix}_{i=\overline{1,3}}. \end{aligned}$$

აქ ნატურალური რიცხვები  $q_1, \dots, q_p$  დეტერმინანტის მესამე სტრიქონში წარმოადგენს ნატურალური  $q$  რიცხვის  $p$ -დაყოფას, აჯამვა ვრცელდება  $l_3 = l - l_1 - l_2$  ნატურალური რიცხვის ყველა დალაგებული (მაგ., ლექსიკოგრაფულად) დაყოფების  $\mathcal{R}(l_3) = \{m_i^{q_i} | i = \overline{1, p}, m_i > m_{i+1}\}$  მულტისიმრავლეზე (იხ., მაგ., [53], გვ. 15-28; [137]), ხოლო ნატურალური რიცხვები  $m_i, q_i$  აკმაყოფილებს პირობებს:

$$(90) \quad \sum_{i=1}^p q_i = q, \quad \sum_{i=1}^p m_i q_i = l, \quad p = 1, 2, \dots$$

და შემოკლებისათვის შემოღებულია ახალი აღნიშვნები

$$(91) \quad r_0 = a, \quad r_0 + r_1 = c, \quad 1 - r_k = b_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad z_1 = \zeta.$$

ადვილი დასანახია, რომ  $\zeta = 0$  წერტილში გვაქვს

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{reg}(0, z_2) &= z_2 \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)} \det \begin{bmatrix} \frac{(r_0+r_1)_{i-2} z_2^{i-2}}{(r_0+r_1+r_2)_{i-2}} F(r_2, 1-r_3; r_0+r_1+r_2+i-2; -z_2/(1-z_2)) \\ F(r_3, 3-r_0-r_1-i; r_2+r_3; 1-z_2) \end{bmatrix}_{i=2,3} = \\ &= z_2 (1-z_2)^{1-r_3} \frac{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)} \det \begin{bmatrix} \frac{(r_0+r_1)_{i-1}}{(r_0+r_1+r_2)_{i-1}} z_2^{i-1} F(r_0+r_1+i-1, 1-r_3; r_0+r_1+r_2+i-1; z_2) \\ F(r_3, 2-r_0-r_1-i; r_2+r_3; 1-z_2) \end{bmatrix}_{i=2,3}. \end{aligned}$$

ამ გამოსახულების შედარება (9) ფორმულასთან და 4.1 თეორემის გამოყენება გვაძლევს

$$(92) \quad \mathcal{F}_2^{reg}(0, z_2) = z_2(1-z_2)^{1-r_3} \frac{\Gamma(r_0+r_1)\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_2+r_3)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)\Gamma(r_0+r_1+r_2+r_3)}.$$

მსგავსივე, თუმცა მნიშვნელოვნად უფრო შრომატევადი გამოთვლებით მტკიცდება [46], რომ (89) დეტერმინანტის ყველა შესაკრები არის  $a, b_2, b_3, c$  პარამეტრების რაციონალური ფუნქცია და, შედეგად, ნებისმიერი  $l > 0$  რიგის წარმოებული (შეად. თეორემა 4.1)

$$(93) \quad \frac{\partial^l}{\partial \zeta^l} \mathcal{F}_2^{reg}(\zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0.$$

შევისწავლოთ (88) ფუნქცია  $\mathcal{F}_{n-1}^{sing}(z_1)$ . ამ ფუნქციისათვის წერტილი  $z_1=0$  განსაკუთრებულია  $(z_1/z_2)^{r_1+r_0-1}$  მამრავლის გამო (თუ  $r_0+r_1-1$  არ არის დადებითი მთელი რიცხვი). (91) აღნიშვნებში ვღებულობთ

$$(94) \quad \mathcal{F}_{n-1}^{sing}(\zeta) = \frac{\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b_2)\Gamma(1-a)} \frac{\zeta^{c-1}}{z_2^{c-1}} \times \left[ \begin{array}{l} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} \zeta^{i-1} F\left( \begin{array}{l} a+i-1 \\ c+i-1 \end{array}; \left\{ b_k, \zeta/z_k \mid k=2, n \right\} \right) \\ \times \det \left[ \begin{array}{l} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} \zeta^{i-1} F\left( \begin{array}{l} c-b_2+i-1 \\ c+i-1 \end{array}; \left\{ b_k, (\zeta-z_2)/(z_k-z_2) \mid k=3, n \right\} \right) \\ z_j^{i-1} F\left( \begin{array}{l} 1-b_j \\ 2-b_{j-1}-b_j \end{array}; \left\{ 2-a-i, 1-\frac{z_{j-1}}{z_j}; c-a, \frac{z_j-z_{j-1}}{z_j-\zeta} \right\} \left\{ b_k, \frac{z_j-z_{j-1}}{z_j-z_k} \mid k=2, n \right\} \right) \end{array} \right]_{j=1, n} \end{array} \right]. \quad (z_n=1)$$

შეგნიშნოთ, რომ  $n=2$  შემთხვევაში  $\mathcal{F}_{n-1}^{sing} = \mathcal{F}_1^{sing}$  დაიყვანება (162) ფორმულაზე და, ამდენად,  $\mathcal{F}_1^{sing}(\zeta) \equiv 0$ .

$n \geq 3$  შემთხვევაში (94) ფორმულის გასამარტივებლად საჭირო ხდება მეორე სტრიქონში მდგარი (50) ტიპის ჰგ ფუნქციის გამოსახვა (41) ფორმულით განმარტებული  $F_D$  ლაურიხელას ფუნქციით, რომელიც დგას დეტერმინანტის დანარჩენ სტრიქონებში. ზოგად შემთხვევაში კავშირი ამ ფუნქციებს შორის ცნობილი არ არის. მონოგრაფიაში [62] შესწავლილია ზოგიერთი კერძო შემთხვევა, როცა ასეთი კავშირი არსებობს აპელის  $F_1$  და  $F_2$  ფუნქციებს შორის, რაც შეესაბამება მნიშვნელობას  $n=3$ .

ამ შემთხვევაში (94) ფორმულა გვაძლევს

$$\mathcal{F}_2^{sing}(\zeta) = \frac{\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b_2)\Gamma(1-a)} \det \left[ \begin{array}{l} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} \zeta^{i-1} F\left( \begin{array}{l} a+i-1 \\ c+i-1 \end{array}; b_2, \zeta/z_2; b_3, \zeta \right) \left( \frac{\zeta}{z_2} \right)^{c-1} \\ \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} \zeta^{i-1} F\left( \begin{array}{l} c-b_2+i-1 \\ c+i-1 \end{array}; b_3, (\zeta-z_2)/(1-z_2) \right) \\ F\left( \begin{array}{l} 1-b_3 \\ 2-b_2-b_3 \end{array}; 2-a-i, 1-z_2; c-a, \frac{1-z_2}{1-\zeta} \right) \end{array} \right]_{i=1,3}.$$

ვისარგებლოთ დეტერმინანტის მეორე სტრიქონში თანაფარდობით (იხ. [62], 8(10), გვ. 35)

$$(95) \quad F_2\left( \begin{array}{l} \beta_1, z_1 \\ \alpha \\ \gamma \end{array}; \begin{array}{l} \beta_2, z_2 \\ \alpha \end{array} \right) = (1-z_2)^{-\beta_2} F_1\left( \begin{array}{l} \beta_1 \\ \gamma \end{array}; \alpha - \beta_2, z_1; \beta_2, \frac{z_1}{1-z_2} \right)$$

და გავითვალისწინოთ ფორმულა (56<sub>2</sub>) (იხ. აგრ. [60], 5.11(4)). ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:

$$F_2 \left( \begin{matrix} c-a, \zeta/z_2 & b_3, (\zeta-z_2)/(1-z_2) \\ c-b_2+i-1; & c+i-1 & c-b_2+i-1 \end{matrix} \right) = (1-z_2)^{b_3} (1-\zeta/z_2)^{a+b_2-c} F_1 \left( \begin{matrix} a+i-1 \\ c+i-1; b_2, \zeta/z_2; b_3, \zeta \end{matrix} \right).$$

მაშასადამე,  $\mathcal{F}_2^{sing}(\zeta)$  დეტერმინანტში პირველი და მეორე სტრიქონები ერთმანეთის პროპორციულია და გვაქვს

$$(96) \quad \mathcal{F}_2^{sing}(\zeta) \equiv 0.$$

ფორმულა (95) გვაძლევს საფუძველს *გიგარაუდოთ*, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი

**წინადადება 3.** (50) და (41) ტიპის ჰგ ფუნქციებს შორის არსებობს თანაფარდობა:

$$(97) \quad F \left( \begin{matrix} b_1, z_1; \{b_k, z_k | k=\overline{2, n}\} \\ a; c & a \end{matrix} \right) = \left[ \prod_{k=2}^n (1-z_k)^{-b_k} \right] F \left( \begin{matrix} b_1; a-b+b_1, z_1; \{b_k, \frac{z_1}{1-z_k} | k=\overline{2, n}\} \\ c \end{matrix} \right).$$

$$(b = b_1 + \dots + b_n)$$

(56) თანაფარდობების გამოყენებით (97) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$(97') \quad F \left( \begin{matrix} b_1, z_1; \{b_k, z_k | k=\overline{2, n}\} \\ a; c & a \end{matrix} \right) = \left[ \prod_{k=2}^n (1-z_k)^{-b_k} \right] F \left( \begin{matrix} b_1; a-b+b_1, z_1; \{b_k, z_1/(1-z_k) | k=\overline{2, n}\} \\ c \end{matrix} \right) =$$

$$= (1-z_1)^{c-2b_1-a+b} \left[ \prod_{k=2}^n (1-z_k-z_1)^{-b_k} \right] F \left( \begin{matrix} c-b_1; c-a, z_1; \{b_k, \frac{z_1-z_1/(1-z_k)}{1-z_1/(1-z_k)} | k=\overline{2, n}\} \\ c \end{matrix} \right) =$$

$$= (1-z_1)^{c-b_1-a} \left[ \prod_{k=2}^n \left( \frac{1-z_1}{1-z_k-z_1} \right)^{b_k} \right] F \left( \begin{matrix} c-b_1; c-a, z_1; \{b_k, \frac{z_1 z_k}{z_1+z_k-1} | k=\overline{2, n}\} \\ c \end{matrix} \right),$$

$$(b = b_1 + \dots + b_n)$$

ამ ფორმულის გამოყენებით გარდავქმნათ ჰგ ფუნქცია (94) დეტერმინანტის მეორე სტრიქონში. ვღებულობთ:

$$F \left( \begin{matrix} c-a, \zeta/z_2 & \{b_k, (\zeta-z_2)/(z_k-z_2) | k=\overline{3, n}\} \\ c-b_2+i-1; & c+i-1 & c-b_2+i-1 \end{matrix} \right) =$$

$$= F \left( \begin{matrix} a+i-1 \\ c+i-1; \{b_k, \zeta/z_k | k=\overline{2, n}\} \\ c+i-1 \end{matrix} \right) (1-\zeta/z_2)^{a+b-c} \prod_{k=3}^n z_k \left( \frac{z_2-\zeta}{z_k-z_2} \right)^{-b_k}$$

და, მაშასადამე,

$$(98) \quad \mathcal{F}_{n-1}^{sing}(\zeta) \equiv 0. \quad (n=2,3,\dots)$$

3 წინადადებიდან და (92) და (98) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

**თეორემა 7.** ფუნქციები  $D_{n-1}$ ,  $\mathcal{F}_{n-1}$  და, მაშასადამე, ამ ფუნქციებთან (79)-(81) ფორმულებით დაკავშირებული ფუნქცია  $B_n$ ,  $n=2,3,\dots$ , არის  $z_1$  კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქცია წრეში  $|z_1| < 1$ . ■

არსებითია, რომ როგორც (49) და (49'), ისე (84), (97) და (97') ფორმულები აკავშირებს ერთმანეთთან სხვადასხვა ტიპის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს, რომელთა დაყვანა ერთი რომელიმე ტიპის ფუნქციაზე არ ხერხდება (იხ., მაგ., [60], §5.11). ამასთან, სწორედ ეს, სხვადასხვა ტიპის ჰგ ფუნქციები შედის  $B_n(z_1)$  ფუნქციის რეგულარულ ნაწილში (ამ ფუნქციის სინგულარული ნაწილი, (98) ფორმულის თანახმად,  $\equiv 0$ ).



ამრიგად, (79), (85), (86) და (98) ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

$$(99) \quad B_n(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)^{-1} \frac{\prod_{j=0}^n \Gamma(r_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right)} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^n \left[ \left(1 - \frac{x_{j-1}}{x_j}\right) \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_1}\right)^{r_j - 1} \right] \frac{r_0 + r_1 + r_2 - 1}{r_0 + r_1 - 1} \frac{\Gamma(r_0 + r_1) \Gamma(r_1 + r_2)}{\Gamma(r_0 + r_1 + r_2) \Gamma(r_1)} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(r_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(r_j + r_{j-1})} \times$$

$$\times \det \left[ \begin{array}{c} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0 + r_1)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_0 + i - 1 \\ r_0 + r_1 + i - 1 \end{array}; \left\{ 1 - r_k, \frac{x_1}{x_k} \mid k = \overline{2, n} \right\} \right) \\ \frac{(r_0 + r_1 - 1)_{i-1}}{(r_0 + r_1 + r_2 - 1)_{i-1}} x_2^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_2 \\ r_2 \end{array}; \begin{array}{c} 2 - r_0 - i, x_1/x_2 \\ 3 - r_0 - r_1 - i \end{array}; \left\{ 1 - r_k, (x_2 - x_1)/(x_2 - x_k) \mid k = \overline{3, n} \right\} \right) \\ x_j^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_j \\ r_{j-1} + r_j \end{array}; \begin{array}{c} 2 - r_0 - i, 1 - \frac{x_{j-1}}{x_j} \\ 1 - r_k, \frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_k} \end{array}; \left\{ 1 - r_k, \frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_k} \mid k = \overline{1, n} \right. \right. \\ \left. \left. \mid k \neq j, j-1 \right\} \right) \end{array} \right]_{j=3, n}^{i=1, n}$$

$$(0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n; \quad n = 2, 3, \dots)$$

რომელიც  $n=3$  შემთხვევაში დაიყვანება თანაფარდობაზე:

$$(99') \quad B_3(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{j=0}^3 \Gamma(r_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=0}^3 r_j\right)} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^3 r_j\right) \Gamma(r_2)}{(r_0 + r_1 - 1) \Gamma(r_3 + r_2) \Gamma(r_0 + r_1 + r_2 - 1)} [x_3 x_2 (x_3 - x_1)]^{-1} \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right)^{r_3 - 1} \times$$

$$\times \det \left[ \begin{array}{c} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0 + r_1)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_0 + i - 1 \\ r_0 + r_1 + i - 1 \end{array}; \begin{array}{c} 1 - r_2, \frac{x_1}{x_2} \\ 1 - r_3, \frac{x_1}{x_3} \end{array} \right) \\ \frac{(r_0 + r_1 - 1)_{i-1}}{(r_0 + r_1 + r_2 - 1)_{i-1}} x_2^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_2 \\ r_2 \end{array}; \begin{array}{c} 2 - r_0 - i, x_1/x_2 \\ 3 - r_0 - r_1 - i \end{array}; \begin{array}{c} 1 - r_3, (x_2 - x_1)/(x_2 - x_3) \\ r_0 + r_1 + r_2 + i - 2 \end{array} \right) \\ x_3^{i-1} F \left( \begin{array}{c} r_3 \\ r_2 + r_3 \end{array}; \begin{array}{c} 2 - r_0 - i, 1 - \frac{x_2}{x_3} \\ 1 - r_1, \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \end{array}; \begin{array}{c} 1 - r_1, \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \end{array} \right) \end{array} \right]_{i=1, 3}$$

$$(0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3)$$

როგორც ვხედავთ, პარამეტრების რაოდენობის გაზრდით გამოწვეული გართულების გარდა,  $n \geq 3$  შემთხვევაში (2) ფორმულის დასამტკიცებლად შესასწავლია მრავალი კომპლექსური ცვლადის სხვადასხვა ტიპის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების სინგულარობები. ამასთან, ინტეგრალურ წარმოდგენას აპელის  $F_2$  ფუნქციისათვის და მისი მრავალგანზომილებიანი ანალოგებისათვის (იხ. ფ-ლა (50)) აქვს მნიშვნელოვნად უფრო რთული სახე, ვიდრე აპელის  $F_1$  ფუნქციისა და ლაურიხელას  $F_D$  ფუნქციისათვის (იხ. ფ-ლა (41)).

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ  $n \geq 3$  შემთხვევაში (99) ფორმულაში გაჩნდა  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  ცვლადებზე დამოკიდებული მამრავლი, რომელიც არ გვქონდა  $n=2$  შემთხვევაში.

ბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ ჰგ ფუნქცია, რომელიც დგას (99) ფორმულის მეორე სტრიქონში, განსხვავებით დანარჩენ სტრიქონებში მდგარი ლაურიხელას ფუნქციებისაგან, აკმაყოფილებს კერძო წარმობებიდან (53) განტოლებათა სისტემას;  $n=2$  შემთხვევაში (10)-(28) დეტერმინანტებში შემაჯავალი ყველა ფუნქცია აკმაყოფილებს გაუსის ჰგ განტოლებას.

### §4.5. კარლსონის თეორემა და მისი შედეგები

ამ თავში დასმული ამოცანა თავისი მათემატიკური ბუნებით ანალოგიურია მაღალი ენერგიების ფიზიკაში ცნობილი პრობლემისა [63], [64]: მოიძებნოს გაბნევის პარციალური ამპლიტუდების ანალიზური გაგრძელება იმპულსის მომენტის კომპლექსურ სიბრტყეზე, თუ ცნობილია ამ ამპლიტუდების ყოფაქცევა მომენტის ფიზიკური მნიშვნელობებისათვის (რომლებიც, იმპულსის მომენტის კვანტური თვისებების გათვალისწინებით, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნატურალურ რიცხვებად). ასეთი ანალიზური გაგრძელება ცალსახაა, თუ გასაგრძელებელი ფუნქციები აკმაყოფილებენ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში ცნობილი კარლსონის თეორემის პირობებს:

**კარლსონის თეორემა.** თუ ფუნქცია  $f(z)$  რეგულარულია არეში  $\text{Re} z > A$ , ამასთან  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| < \exp(k|z|)$ , სადაც  $0 < k < \pi$ , და  $f(z) = 0$ , როცა  $z = N + 1, N + 2, \dots$ , მაშინ  $f(z) = 0$  კომპლექსური  $z$  ცვლადის მთელ სიბრტყეზე (დამტკიცებისათვის იხ., მაგ., [62]).

ნაშრომში [44] ნახვენებია, რომ სამართლიანია

**თეორემა 7.** ფუნქცია

$$(100) \quad f(r_0, r_1, \dots, r_n) = B_n(r_0, r_1, \dots, r_n) - \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j) / \Gamma(\sum_{j=0}^n r_j)$$

არეში  $\text{Re} r_j > 0$  თითოეული  $r_j$  ცვლადის ( $j = \overline{0, n}$ ) კომპლექსურ სიბრტყეზე აკმაყოფილებს კარლსონის თეორემის პირობებს, როცა დანარჩენი ცვლადები ფიქსირებულია.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი

**ლემა 4.** ფუნქცია  $B_n(\mathbf{z})$  (იხ. ფ-ლა (76)) შემოსახვერულია თითოეული  $r_j$  ცვლადის კომპლექსურ სიბრტყეზე, როცა  $|r_j| \rightarrow \infty$ , დანარჩენი ცვლადები  $r_0, r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_n$  ფიქსირებულია და  $\text{Re} r_j > 0, j = \overline{0, n}$ :

$$(101) \quad |B_n(\mathbf{z})| \leq M < \infty,$$

ამასთან,  $M$  არ არის დამოკიდებული  $r_0, r_1, \dots, r_n$  ცვლადებზე.

**ლემის დამტკიცება.** ჩავწეროთ (77) ფორმულები შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{1l} &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{z_1}{z_k}\right)^{1-r_k} \int_0^1 u^{r_0+l-2} f_1(u) du, \\ \tilde{b}_{jl} &= \left(1 - \frac{z_{j-1}}{z_j}\right)^{r_j} \int_0^1 \left(1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j} u\right)^{r_0+l-2} \prod_{k=1}^{j-2} \left(1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_k} u\right)^{r_k-1} (1-u)^{r_{j-1}-1} f_j(u) du, \quad (j = \overline{2, n}) \end{aligned}$$

სადაც  $z_k = x_k/x_n, 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = 1$  და

$$\begin{aligned} f_1(u) &= (1-u)^{r_1-1} \prod_{k=2}^n (1 - uz_1/z_k)^{r_k-1}, \\ f_j(u) &= u^{r_j-1} \prod_{k=j+1}^n \left(1 + \frac{z_j - z_{j-1}}{z_k - z_j} u\right)^{r_k-1}. \quad (j = \overline{2, n}) \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ ამ ინტეგრალებისათვის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ. როგორც ცნობილია, თუ ფუნქცია  $f(x)$  მონოტონურია ყველგან  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ , ხოლო  $g(x)$  ინტეგრებადია, მაშინ ადგილი აქვს ე.წ. ბონეს ფორმულებს (იხ., მაგ., [97], II, n° 306, გვ. 119):

$$\int_a^b f(u)g(u)du = f(a) \int_a^\eta g(u)du, \quad a \leq \eta \leq b, \quad \text{თუ } f(x) \text{ კლებადია,}$$

$$\int_a^b f(u)g(u)du = f(b) \int_a^\xi g(u)du, \quad a \leq \xi \leq b, \quad \text{თუ } f(x) \text{ ზრდადია.}$$

$$(x \in [a, b])$$

ცხადია, რომ როცა  $\operatorname{Re} r_j \geq 1, j = \overline{0, n}$ , მაშინ სეგმენტზე  $u \in [0, 1]$  მამრავლი

$$|f_1(u)| = (1-u)^{\operatorname{Re} r_1 - 1} \prod_{k=2}^n (1 - u z_1 / z_k)^{\operatorname{Re} r_k - 1}$$

გამოსახულებაში  $\tilde{b}_{1l}$  კლებადია და არაუარყოფითია, ისევე, როგორც მამრავლები

$$\left[1 - u(z_j - z_{j-1}) / x_j\right]^{l-1} (1-u)^{\operatorname{Re} r_{j-1} - 1} \prod_{k=0}^{j-2} \left[1 - u(z_j - z_{j-1}) / (z_j - z_k)\right]^{\operatorname{Re} r_k - 1} \quad (j = \overline{2, n})$$

გამოსახულებებში  $\tilde{b}_{jl}$ ; მამრავლი  $u^{\operatorname{Re} r_0 + l - 2}$  გამოსახულებაში  $\tilde{b}_{1l}$  და მამრავლები

$$|f_j(u)| = u^{\operatorname{Re} r_j - 1} \prod_{k=j+1}^n \left[1 + u(z_j - z_{j-1}) / (z_k - z_j)\right]^{\operatorname{Re} r_k - 1} \quad (j = \overline{2, n})$$

გამოსახულებებში  $\tilde{b}_{jl}$  ზრდადია და არაუარყოფითია. ამიტომ, როცა  $\operatorname{Re} r_j \geq 1, j = \overline{0, n}$ , ბონეს ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$\tilde{b}_{1l} = \prod_{k=2}^n (1 - z_1 / z_k)^{1 - r_k} \int_0^{\eta_{1l}} \exp[i \arg f_1(u)] u^{r_0 + l - 2} du,$$

$$\tilde{b}_{jl} = \left(1 - \frac{z_{j-1}}{z_j}\right)^{r_j} \prod_{k=j+1}^n \left(\frac{z_k - z_{j-1}}{z_k - z_j}\right)^{r_k - 1} \times$$

$$\times \int_{\xi_{jl}}^1 \exp[i \arg f_j(u)] \left(1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j} u\right)^{r_0 + l - 2} \prod_{k=1}^{j-2} \left(1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_k} u\right)^{r_k - 1} (1-u)^{r_{j-1} - 1} du.$$

$$(0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n, \eta_{1l}, \xi_{jl} \in [0, 1])$$

ცხადია, რიცხვები  $\eta_{1l}, \xi_{jl}$  საზოგადოდ, დამოკიდებულია  $r_k$  მაჩვენებლების მნიშვნელობაზე.

ამ გამოსახულებების (76) ფორმულაში შეტანის შემდეგ ვღებულობთ:

$$(102) \quad B_n(\mathbf{z}) \det [z_j^{l-1}]_{l, j=1, \overline{n}} = M_1 \det [z_j^{l-1} b'_{jl}]_{l, j=1, \overline{n}},$$

სადაც

$$b'_{1l} = \int_0^{\eta_{1l}} \exp[i \arg f_1(u)] u^{r_0 + l - 2} du,$$

$$b'_{jl} = \int_{\xi_{jl}}^1 \exp[i \arg f_j(u)] \left[1 - (1 - z_{j-1} / z_j) u\right]^{r_0 + l - 2} \prod_{k=1}^{j-2} \left[1 - u(z_j - z_{j-1}) / (z_j - z_k)\right]^{r_k - 1} (1-u)^{r_{j-1} - 1} du$$

$$(\eta_{1l}, \xi_{jl} \in [0, 1])$$

და

$$M_1 = \left[ \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{z_1}{z_k}\right)^{1 - r_k} \left(1 - \frac{z_{k-1}}{z_k}\right)^{r_k} \right] \prod_{j=2}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n \left(\frac{z_k - z_{j-1}}{z_k - z_j}\right)^{r_k - 1}.$$

$M_1$  სიდიდის გასამარტივებლად გადავხვათ  $j$  და  $k$  ინდექსებით გადამრავლების თანმიმდევრობა. მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left[ \prod_{k=2}^n \left( \frac{z_k}{z_k - z_1} \frac{z_k - z_{k-1}}{z_k} \right)^{r_{k-1}} \left( 1 - \frac{z_{k-1}}{z_k} \right) \right] \prod_{k=3}^n \prod_{j=2}^{k-1} \left( \frac{z_k - z_{j-1}}{z_k - z_j} \right)^{r_{k-1}} = \\
&= \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{z_{k-1}}{z_k} \right) \prod_{k=3}^n \left[ \left( \frac{z_k - z_{k-1}}{z_k - z_1} \right) \prod_{j=2}^{k-1} \left( \frac{z_k - z_{j-1}}{z_k - z_j} \right) \right]^{r_{k-1}}.
\end{aligned}$$

ვინაიდან

$$\prod_{j=2}^{k-1} \frac{z_k - z_{j-1}}{z_k - z_j} = \frac{z_k - z_1}{z_k - z_{k-1}},$$

გვრჩება

$$M_1 = \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{z_{k-1}}{z_k} \right).$$

შევიტანოთ ეს შედეგი (102) ფორმულაში და ვისარგებლოთ ცხადი უტოლობებით

$$\begin{aligned}
|B_n(\mathbf{z})| \det[z_j^{i-1}]_{i,j=1,\overline{n}} \prod_{k=2}^n \frac{z_k}{z_k - z_{k-1}} &= \left| \det[z_j^{i-1} b'_{ji}]_{i,j=1,\overline{n}} \right| \leq \\
&\leq \text{per}[z_j^{i-1} |b'_{ji}|]_{i,j=1,\overline{n}} \leq \text{per}[z_j^{i-1} b''_{ji}]_{i,j=1,\overline{n}},
\end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
|b'_{li}| &\leq \int_0^{\eta_{li}} |u^{r_0+i-2}| du \leq \int_0^1 |u^{r_0+i-2}| du \equiv b''_{li}, \\
|b'_{ji}| &\leq \int_0^1 \left| \left( 1 - u \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j} \right)^{r_0+i-2} \prod_{k=1}^{j-2} \left( 1 - u \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_k} \right)^{r_k-1} (1-u)^{r_{j-1}-1} \right| du \equiv b''_{ji}.
\end{aligned}$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ არაუარყოფითი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებების ინტეგრებისას საზღვრების გაფართოება  $\eta_{li} \rightarrow \eta'_{li} = 1$ ,  $\xi_{ji} \rightarrow \xi'_{ji} = 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , აძლიერებს უტოლობებს. ადვილი დასანახია, რომ ინტეგრების საზღვრების ასეთი არჩევისას პირობები  $\text{Re } r_j \geq 1$  ( $j = \overline{0, n}$ ) უზრუნველყოფს ყველა ინტეგრალის კრებადობას  $[b''_{ji}]_{i,j=1,\overline{n}}$  მატრიცაში.

მიღებული  $[b''_{ji}]_{i,j=1,\overline{n}}$  მატრიცის ელემენტებისა და მისი პერმანენტის შესაფასებლად კიდევ ერთხელ ვისარგებლოთ ბონეს ფორმულებით. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned}
b''_{li} &= \int_0^1 |u^{r_0+i-2}| du = 1 \cdot \int_{\xi_{li}}^1 du \leq 1, \\
b''_{ji} &= \int_0^1 \left| \left( 1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j} u \right)^{r_0+i-2} \prod_{k=1}^{j-2} \left( 1 - \frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_k} u \right)^{r_k-1} (1-u)^{r_{j-1}-1} \right| du = 1 \cdot \int_0^{\eta_{ji}} du \leq 1.
\end{aligned}$$

ამიტომ მივიღებთ (101) შეფასებას, სადაც მამრავლი

$$(103) \quad M = \text{per}[z_j^{i-1}]_{i,j=1,\overline{n}} \left\{ \det[z_j^{i-1}]_{i,j=1,\overline{n}} \right\}^{-1} \prod_{k=2}^n (1 - z_{k-1}/z_k),$$

ცხადია, არ არის დამოკიდებული  $r_0, r_1, \dots, r_n$  სიდიდეებზე.

თანახმად თეორემისა ანალიზური გაგრძელების შესახებ, ეს შედეგი, რომელიც დავამტკიცეთ, როცა  $\text{Re } r_j \geq 1$ ,  $j = \overline{0, n}$ , მართებული რჩება არეში, სადაც ანალიზურია ფუნქცია  $B_n(r_0, \dots, r_n; \mathbf{z})$ , ე. ი., როცა  $\text{Re } r_j > 0$ , კერძოდ, როცა  $|r_j| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re } r_j > 0$ ,  $j = \overline{0, n}$ . ■

**4.7 თეორემის დამტკიცება.** როგორც ცნობილია, ფუნქცია  $\Gamma(z)$  ანალიზურია ყველგან, გარდა წერტილებისა  $z=0, -1, \dots$ . ამიტომ (100) ფორმულით განმარტებული ფუნქცია  $f(r_0, \dots, r_n)$  ანალიზურია არეში  $\text{Re } r_j \geq 0$  ( $j=0, \overline{n}$ ). III თავში დამტკიცებული დებულების თანახმად (იხ. ფორმულა (3.68)), გვაქვს  $f_0(r_0) = f(r_0, \dots, r_n) = 0$ , როცა  $r_0 > 0, r_j \in \square, j=1, \overline{n}$ . ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით,  $f_0(r_0) = 0$   $r_0$  ცვლადის კომპლექსურ ნახევარსიბრტყეზედაც, როცა  $\text{Re } r_0 > 0, r_j \in \square, j=1, \overline{n}$ .

დავაფიქსიროთ რიცხვები  $r_0, r_2, \dots, r_n$  ისე, რომ  $\text{Re } r_0 > 0, r_j \in \square, j=2, \overline{n}$ , და ვცვალოთ  $r_1$  არეში  $\text{Re } r_1 > 0$ . აღვნიშნოთ  $f_1(r_1) = f(r_0, r_1, \dots, r_n)$ . ცხადია, ამ არეში ფუნქცია  $f_1(r_1)$  ანალიზურია და  $f_1(r_1) = f(r_0, r_1, \dots, r_n) = 0$ , როცა  $r_1 = 1, 2, \dots$ .

ვაჩვენოთ, რომ როცა  $\text{Re } r_0 > 0, \text{Re } r_1 > 0, r_j \in \square, j=2, \overline{n}$ , შესრულებულია პირობაც

$$\lim_{|r_1| \rightarrow \infty} |f_1(r_1)| \exp(-k|r_1|) \leq \text{const}, \quad 0 < k < \pi.$$

მართლაც, როცა  $|z| \rightarrow \infty$  და  $\text{Re } z \geq 0$ ,  $\Gamma$ -ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევის გათვალისწინებით (იხ., მაგ., [60], 1.18(5)), ნებისმიერი ფიქსირებული  $\rho \in \square$  რიცხვისათვის გვაქვს

$$(104) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} \exp(\rho \ln |z|) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\rho)} |z|^\rho = 1.$$

აქედან და (101) შეფასების თანახმად, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} |f_1(r_1)| \exp(-k|r_1|) = \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} \exp(-k|r_1|) \left| B_n(\mathbf{z}) - \frac{\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_1+\rho_1)} \Gamma(r_0) \prod_{j=2}^n \Gamma(r_j) \right| \leq \\ &\leq \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} \exp(-k|r_1|) \left\{ |B_n(\mathbf{z})| + \left| \frac{\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_1+\rho_1)} \Gamma(r_0) \prod_{j=2}^n \Gamma(r_j) \right| \right\} \leq \\ &\leq M \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} \exp(-k|r_1|) + \Gamma(r_0) \prod_{j=2}^n \Gamma(r_j) \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_1+\rho_1)} \exp(\rho_1 \ln |r_1|) \right\} \lim_{|r_1| \rightarrow \infty} \left\{ |r_1|^{-\rho_1} \exp(-k|r_1|) \right\} = 0, \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $\lim_{|r_1| \rightarrow \infty} |f_1(r_1)| e^{-k|r_1|} = 0$  ნებისმიერი  $k > 0$  და  $\rho_1 = r_0 + r_2 + \dots + r_n$  ფიქსირებული რიცხვებისათვის. კერძოდ, შეგვიძლია ავირჩიოთ  $0 < k < \pi, \text{Re } r_0 > 0, r_j \in \square, j=2, \overline{n}$ .

ამრიგად, როცა  $\text{Re } r_0 > 0, \text{Re } r_1 > 0, r_j \in \square, j=2, \overline{n}$ , ფუნქცია  $f(r_0, r_1, \dots, r_n)$  აკმაყოფილებს კარლსონის თეორემის ყველა პირობას.

გავაკეთოთ ინდუქციური დაშვება: ვთქვათ, თეორემა სამართლიანია  $r_j$  ცვლადებისათვის, რომელთა ნომრები არ აღემატება  $m$  რიცხვს,  $1 \leq m \leq n-1$ , ე.ი., ვთქვათ, ფუნქცია (100)  $f(r_0, \dots, r_{m-1}, r_m, \dots, r_n) \equiv f_m(r_m)$  აკმაყოფილებს კარლსონის თეორემის პირობებს:

$$f_m(r_m) = f(r_0, \dots, r_{m-1}, r_m, \dots, r_n) = 0, \text{ როცა } \text{Re } r_j > 0, j=0, \overline{m-1}, r_m = 1, 2, \dots, r_{m+k} \in \square, k=1, \overline{n-m},$$

$$\lim_{|r_m| \rightarrow \infty} |f_m(r_m)| \exp(-k|r_m|) \leq \text{const}, 0 < k < \pi, \text{ როცა } \text{Re } r_j > 0, j=0, \overline{m-1}, \text{Re } r_m > 0, r_{m+k} \in \square, k=1, \overline{n-m}.$$

მაშინ, კარლსონის თეორემის თანახმად, როცა  $\text{Re } r_j > 0, j=0, \overline{m-1}, \text{Re } r_m > 0, r_{m+k} \in \square, k=1, \overline{n-m}$ , მივიღებთ  $f_m(r_m) = 0, f_{m+1}(r_{m+1}) = 0$  და, (101) და (104) ფორმულების გათვალისწინებით,

$$\lim_{|r_{m+1}| \rightarrow \infty} |f_{m+1}(r_{m+1})| \exp(-k|r_{m+1}|) \leq \lim_{|r_{m+1}| \rightarrow \infty} \exp(-k|r_{m+1}|) \left\{ M + \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m+1}}^n \Gamma(r_j) \frac{\Gamma(r_{m+1})}{\Gamma(r_{m+1} + \rho_{m+1})} \right\} = 0,$$

სადაც  $0 < k < \pi$  და  $\rho_{m+1} = r_0 + \dots + r_m + r_{m+2} + \dots + r_n$  - ფიქსირებული რიცხვებია. ■

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარე შედეგებიდან აღვნიშნოთ ზოგიერთი [44].

**შედეგი 9.** ნებისმიერი  $r_j \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} r_j > 0, j = \overline{0, n}$ , რიცხვებისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$B_n(\mathbf{r}) = \prod_{j=0}^n \Gamma(r_j) / \Gamma(\sum_{j=0}^n r_j),$$

რომელიც წარმოადგენს ეილერის ფორმულის მრავალგანზომილებიან განზოგადებას.

**შედეგი 10.**  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის სამართლიანია იგივეობები (იხ. ფ-ები (79)-(84), (91)-(93), (108) და (109)):

$$(105) \quad \det \begin{bmatrix} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} a+i-1 \\ c+i-1 \end{matrix}; \left\{ b_k, \frac{x_1}{x_k} \mid k = \overline{2, n} \right\} \right) \\ \frac{(c-1)_{i-1}}{(c-b_2)_{i-1}} x_2^{i-1} F \left( \begin{matrix} 1-b_2 \\ 1-b_2 \end{matrix}; \begin{matrix} 2-a-i, x_1/x_2 \\ 3-c-i \end{matrix}; \left\{ b_k, (x_2-x_1)/(x_2-x_k) \mid k = \overline{3, n} \right\} \right) \\ x_j^{i-1} F \left( \begin{matrix} 1-b_j \\ 2-b_j-b_{j-1} \end{matrix}; \begin{matrix} 2-a-i, 1-\frac{x_{j-1}}{x_j} \\ 1-c+a, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_1} \end{matrix}; \left\{ b_k, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k} \mid \begin{matrix} k = \overline{2, n} \\ k \neq j, j-1 \end{matrix} \right\} \right) \end{bmatrix}_{i=\overline{1, n}, j=\overline{3, n}} =$$

$$= \frac{(c-1)\Gamma(c-b_2)\Gamma(1-b_n)}{\Gamma(c-b+n-1)\Gamma(1-b_2)} \prod_{j=3}^n \left[ \frac{\Gamma(2-b_j-b_{j-1})}{\Gamma(1-b_j)} \frac{x_j(x_j-x_{j-1})^{b_j-1}}{(x_j-x_1)^{b_j-1}} \right] \frac{x_2 \det [x_j^{i-1}]_1^n}{\prod_{k=2}^n (x_k-x_1)}.$$

$(b = b_2 + \dots + b_n; 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n; n = 2, 3, \dots)$

$$(106) \quad \det \begin{bmatrix} \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} a+i-1 \\ c+i-1 \end{matrix}; \left\{ b_k, x_1/x_k \mid k = \overline{2, n} \right\} \right) \\ \frac{(a)_{i-1}}{(c)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} c-b_2+i-1 \\ c+i-1 \end{matrix}; \begin{matrix} c-a, x_1/x_2 \\ c+i-1 \end{matrix}; \left\{ b_k, (x_1-x_2)/(x_k-x_2) \mid k = \overline{3, n} \right\} \right) \\ x_j^{i-1} F \left( \begin{matrix} 1-b_j \\ 2-b_{j-1}-b_j \end{matrix}; \begin{matrix} 2-a-i, 1-\frac{x_{j-1}}{x_j} \\ c-a, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_1} \end{matrix}; \left\{ b_k, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k} \mid \begin{matrix} k = \overline{2, n} \\ k \neq j, j-1 \end{matrix} \right\} \right) \end{bmatrix}_{i=\overline{1, n}, j=\overline{3, n}} = 0.$$

$(n = 2, 3, \dots)$

კერძოდ,  $n=3$  შემთხვევაში (105) ფორმულიდან ვპოულობთ:

$$(105') \quad \det \begin{bmatrix} \frac{(r_0)_{i-1}}{(r_0+r_1)_{i-1}} x_1^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \begin{matrix} 1-r_2, x_1/x_2 \\ 1-r_3, x_1/x_3 \end{matrix} \right) \\ \frac{(r_0+r_1-1)_{i-1}}{(r_0+r_1+r_2-1)_{i-1}} x_2^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_2 \\ r_2 \end{matrix}; \begin{matrix} 2-r_0-i, x_1/x_2 \\ 3-r_0-r_1-i \end{matrix}; \begin{matrix} 1-r_3, (x_2-x_1)/(x_2-x_3) \\ r_0+r_1+r_2+i-2 \end{matrix} \right) \\ x_3^{i-1} F \left( \begin{matrix} r_3 \\ r_2+r_3 \end{matrix}; \begin{matrix} 2-r_0-i, 1-x_2/x_3 \\ 1-r_1, (x_3-x_2)/(x_3-x_1) \end{matrix} \right) \end{bmatrix}_{i=\overline{1, 3}} =$$

$$= \left( \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} \right)^{r_3} x_2 x_3 (x_3-x_2) \frac{\Gamma(r_0+r_1+r_2)\Gamma(r_2+r_3)}{\Gamma(r_0+r_1+r_2+r_3)\Gamma(r_2)} \frac{(r_1+r_0-1)}{(r_0+r_1+r_2-1)},$$

რაც  $x_1=0$  მნიშვნელობისათვის დაიყვანება (103) ფორმულაზე.

**შენიშვნა.**  $n = 2$  შემთხვევაში (105) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$(105'') \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b, c; x_1/x_2) & \frac{a}{c} x_1 F(a+1, b; c+1; x_1/x_2) \\ F(1-b, 1-a; 2-c, x_1/x_2) & x_2 \frac{c-1}{c-b} F(1-b, -a; 1-c, x_1/x_2) \end{bmatrix} = \frac{c-1}{c-b} x_2,$$

რაც, გაუსის ჰგ ფუნქციის (5) სიმეტრიის გათვალისწინებით, დაიყვანება (19) ფორმულაზე. შევნიშნოთ, რომ (105'') ფორმულის მარცხენა მხარეში არ შეიძლება (11<sub>2</sub>) თანაფარდობის შეტანა უშუალოდ, რადგან ამ თანაფარდობის გამოყენების პირობები დეტერმინანტის პირველ და მეორე სტრიქონში შემავალი ჰგ ფუნქციებისათვის არ სრულდება ერთდროულად (იხ. შენიშვნა (25') ფ-ლის შემდეგ). მაგრამ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია  $n=2$  შემთხვევაში, ჰგ ფუნქციების ყველა განსაკუთრებულობა (105'') იგივეობაში ბათილდება და იგივეობა რჩება ძალაში  $z \in$  ყველა კომპლექსური მნიშვნელობისათვისაც (იხ. [45] და დამატება A).

ზოგად შემთხვევაში 4.7 თეორემიდან გამომდინარეობს

**შედეგი 11.**  $r_0, r_1, \dots, r_n$  პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის (88) დეტერმინანტში ჰგ ფუნქციების განსაკუთრებულობები იკვეცება და სამართლიანია იგივეობა [44] (იხ. ფ-ები (88), (91) და (92))

$$D_{n-1}(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=0}^n r_j\right) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(r_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(r_j + r_{j-1})} \mathcal{F}_{n-1}^{reg}(z_1), \quad (z_1 \in \mathbf{C}; n = 2, 3, \dots)$$

ე. ი., კერძოდ,  $z_1 = 0$  არის (88) დეტერმინანტის წესიერი წერტილი.

**შედეგი 12.**  $a, b_1, \dots, b_n, c$  პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის გვაქვს:

$$(107) \quad \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b+n-1)\Gamma(1-b_2)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_2+1)\Gamma(1-b_n)} \frac{\partial^l \mathcal{F}_{n-1}^{reg}}{\partial x_1^l} \Big|_{x_1=0} =$$

$$= x_2 \prod_{2 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \prod_{j=3}^n \left[ \frac{\Gamma(2-b_j-b_{j-1})}{\Gamma(1-b_j)} \frac{x_j}{(x_j - x_{j-1})^{1-b_j}} \right] \frac{\partial^l}{\partial x_1^l} \left[ \prod_{j=3}^n (x_j - x_1)^{1-b_j} \right] \Big|_{x_1=0} =$$

$$= x_2 \prod_{2 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \prod_{j=3}^n \left[ \frac{\Gamma(2-b_j-b_{j-1})}{\Gamma(1-b_j)} \frac{x_j}{(x_j - x_{j-1})^{1-b_j}} \right] l! \sum_{\substack{l_3, \dots, l_n \\ (l_3 + \dots + l_n = l)}} \prod_{j=3}^n \frac{(b_j-1)_{l_j}}{l_j!} x_j^{1-b_j-l_j},$$

სადაც მარცხენა მხარე გამოითვლება (92), (94), (95), (97), (101) და (105) ფორმულების გამოყენებით. კერძოდ, როცა  $n=3$  და  $l=0$ , (102) და (107) იძლევა ფორმულას

$$(108) \quad \det \begin{bmatrix} F\left(\frac{a}{c}; b, 1-z\right) & \frac{zb}{b+a-c} F\left(\frac{1-a}{c-a-b+1}; 1-b, z\right) \\ F\left(\frac{a}{c}; b+1, 1-z\right) & F\left(\frac{1-a}{c-a-b}; -b, z\right) \end{bmatrix} = F\left(\frac{a}{c}; b, 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

რომელიც წარმოადგენს (19)-(28) ტიპის კიდევ ერთ თანაფარდობას და მართებულია  $a, b, c$  პარამეტრების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის.

## IV თავის დასკვნები

1. შემოდებულია განზოგადებული,  $(n+1)$  პარამეტრზე დამოკიდებული ბეტა-ფუნქციის განმარტება (ფ-ლა (1)), რომლის კერძო შემთხვევაა ეილერის ცნობილი ბეტა-ინტეგრალი ( $n=1$  შემთხვევაში).
2. შესწავლილია განზოგადებული ბეტა-ფუნქციის თვისებები, კერძოდ, ნაჩვენებია ამ ფუნქციის თანაბარი შემოსაზღვრულობა (ფ-ლა (101)) მისი ყოველი არგუმენტის კომპლექსურ სიბრტყეზე.
3. ნაპოვნია ცხადი სახე განზოგადებული ბეტა-ფუნქციის ზედა ზღვარისათვის (ფ-ლა (103)).
4. დამტკიცებულია ეილერის ტიპის ფორმულის სამართლიანობა განზოგადებული ბეტა-ფუნქციისათვის (ფ-ლა (2), (10)). შედეგად, შემოთავაზებულია ინტეგრალური წარმოდგენა მულტინომიალური კოეფიციენტებისათვის და ნაჩვენებია ამ კოეფიციენტების თანაბარი შემოსაზღვრულობა მათი ყოველი არგუმენტის კომპლექსურ სიბრტყეზე.
5. დამტკიცებულია თეორემა განზოგადებულ ბეტა-ფუნქციაში შემავალი ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების სინგულარობების შეკვეცის შესახებ.
6. ნაპოვნია ახალი თანაფარდობები  $n$  ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს შორის. დაზუსტებულია მოსაზღვრე ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციათა დამაკავშირებელ თანაფარდობათა რაოდენობა და მოცემულია ამ თანაფარდობათა სრული სისტემა ცხადი სახით. ერთი ცვლადის შემთხვევაში ეს თანაფარდობები ემთხვევა გაუსის ცნობილ ფორმულებს, ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში იძლევა 38 ფორმულას აპელის ჰგ ფუნქციისათვის. ეს შედეგი განსხვავდება აპელისა და კამპე დე ფერიეს ფუნდამენტურ მონოგრაფიაში დეკლარირებული რიცხვისგან ამ თანაფარდობათა რაოდენობისათვის (56). გაანალიზებულია ამ განსხვავების მიზეზები.
7.  $n=2$  შემთხვევაში ნაჩვენებია განზოგადებული ბეტა-ფუნქციის კავშირი გაუსის ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების ვრონსკიანთან. ამ კავშირის გამოყენებით ცხადი სახით გამოთვლილია ჰგ განტოლების კუმერის ამონახსნების ყველა არატრივიალური წყვილის ვრონსკიანები.
8. ნაპოვნი თანაფარდობები გამოყენებულია სპეციალური და ელემენტარული ფუნქციების ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის ანალიზურად გამოთვლისათვის. მიღებული შედეგების ნაწილი არ ფიგურირებს ცნობარებში, მათ შორის ელექტრონულშიც.
9. სასრული სახით გამოთვლილია სპეციალური ფუნქციების შემცველი ზოგიერთი მწკრივი მიღებულია ზაალშუტცის ფორმულის ტიპის რამდენიმე ახალი თანაფარდობა (ფ-ები (39), (40)).
10. გამოყვანილია რამდენიმე ახალი თანაფარდობა განზოგადებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისათვის (ფ-ლა (40')).



## თავი V

## ოპერატორების ორთოგონალური ინვარიანტების ფიზიკაში გამოყენების მაგალითები

ოპერატორების ინვარიანტების მინიმალური პოლინომური ბაზისის აგების მეთოდები, რომლებიც აღწერილია წარმოდგენილი დისერტაციის §2.3-2.5-ში, შეიძლება წარმატებით გამოვიყენოთ თეორიული ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის შესასწავლად. განსაკუთრებით ნათელი ფიზიკური შინაარსი აქვს სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში მოქმედი ოპერატორების ორთოგონალურ ინვარიანტებს. ფიზიკური პროცესების აღსაწერად ასეთი ინვარიანტების გამოყენებას მდიდარი ტრადიცია აქვს მყარი სხეულის კლასიკურ მექანიკაში (იხ., მაგ., [89], [138]-[140]), ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებისას [90], ჰიდრო- და აეროდინამიკაში (იხ., მაგ., [27]-[30], [88], [141]), ელექტროდინამიკაში ([3], [26], [91]-[94], [100], [101]), გრავიტაციაში [3], [25], უწყვეტი გარემოს ფიზიკასა და დრეკადობის თეორიაში [142]-[144], რელატივისტურ თეორიაში [94], [95a, b], [145]-[147], კრისტალთა სტრუქტურის აღწერისას [31]-[33] და ა.შ. ამ თავში მოყვანილი ორიგინალური შედეგები გამოქვეყნებულია შრომებში [40], [41], [66a, b], [94], [95a, b].

### §5.1. ასიმეტრიული მყარი სხეულის ბრუნვა

განვიხილოთ მყარი სხეულის ანალიზური მექანიკის ერთ-ერთი კლასიკური ამოცანა ასიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის აღწერის შესახებ. ამ ამოცანის ამოხსნის ტრადიციული გზა ემყარება ეილერის დინამიური განტოლებების გამოყენებას მყარი სხეულის მოძრაობისათვის (იხ., მაგ., [139], გვ. 149-158). კარგად არის ცნობილი ის სირთულეები, რომლებიც ჩნდება ასეთი აღწერისას (იხ. აგრეთვე [1], გვ. 119-141, [140], გვ. 177-208). ფიზიკური სიდიდეები, რომლებიც ფიგურირებს ამ განტოლებებში, აიწერება (იხ., მაგ., [138], გვ. 233-244) შემდეგი ინვარიანტებით:

- 1) ინერციის  $\mathcal{I}_{kl}$  (ნამდვილი სიმეტრიული სამგანზომილებიანი) ტენზორის ინვარიანტები, რომლებიც ურთიერთცალსახად გამოისახება ინერციის  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$  მთავარი მომენტებით, ამასთან, ასიმეტრიული ბზრიალასათვის  $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2 \neq \mathcal{J}_3 \neq \mathcal{J}_1$  ( $\mathcal{J}_k > 0, k = \overline{1,3}$ );
- 2) ასიმეტრიული ბზრიალას ღერძული ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ვექტორის კვადრატი  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ , სადაც  $\omega_k, k = \overline{1,3}$ , არის კუთხური სიჩქარის  $\vec{\omega}$  ვექტორის პროექციები ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე;
- 3) ბზრიალას ღერძული ბრუნვის კინეტიკური ენერჯია  $\mathcal{E}_{rot} = \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k \omega_k^2 / 2 = \langle \vec{\omega} \mathcal{I} \vec{\omega} \rangle / 2$ ;
- 4) ბზრიალას იმპულსის მომენტის ვექტორის კვადრატი  $L^2 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k^2 \omega_k^2 = \langle \vec{\omega} \mathcal{I}^2 \vec{\omega} \rangle$ .

ჩამოთვლილი 6 ინვარიანტი, როგორც აღნიშნულია მონოგრაფიაში [19], (გვ. 226-238) და დისერტაციის §2.5-ში, არ არის საკმარისი ასიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის სრული აღწერისათვის, რამდენადაც არ არის დამოკიდებული ბრუნვის მიმართულებაზე –  $\vec{\omega}$  ვექტორის ნიშანზე (იხ., აგრეთვე, [21a, b]). მოძრაობის სრული აღწერა ხერხდება [40] შრომაში აგებული ინვარიანტების ბაზისის გამოყენებით  $\mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}_{ji}$  და  $\Omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k = -\Omega_{ji}$  ტენზორების ( $\mathcal{I}_{ij}, \Omega_{ij}$ ) წყვილისათვის ( $\Omega_{ij}$  არის კუთხური სიჩქარის  $\vec{\omega}$  ვექტორის დუალური ანტისიმეტრიული სამგანზომილებიანი ტენზორი (იხ., მაგ., [104], გვ. 48), ხოლო  $e_{ijk}$  აღნიშნავს სრულიად ანტისიმეტრიულ მესამე რანგის ერთეულოვან ტენზორს – ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს).

(2.115) ფორმულის თანახმად, განსახილველ შემთხვევაში ორთოგონალური ინვარიანტების მინიმალური (პოლინომური) ბაზისი შეიცავს შემდეგ ინვარიანტებს:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathcal{F} &= \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3, \quad \operatorname{tr} \mathcal{F}^2 = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2, \quad \operatorname{tr} \mathcal{F}^3 = \mathcal{J}_1^3 + \mathcal{J}_2^3 + \mathcal{J}_3^3, \quad \operatorname{tr} \Omega^2 = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = -2\bar{\omega}^2, \\ \operatorname{tr}(\mathcal{F} \Omega^2) &= -\mathcal{J}_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) - \mathcal{J}_2(\omega_1^2 + \omega_3^2) - \mathcal{J}_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -\bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F} + \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k \omega_k^2 = 2\mathcal{C}_{rot} - \bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{tr}(\mathcal{F} \Omega \mathcal{F}^2 \Omega^2) &= \sum_{i,j,k,l,m,q=1}^3 \mathcal{J}_i e_{ijk} \omega_k \mathcal{J}_j^2 e_{jml} \omega_l e_{miq} \omega_q = \sum_{i,j,k,l,m,q=1}^3 \mathcal{J}_i \mathcal{J}_j^2 \omega_k \omega_q \omega_l e_{ijk} (\delta_{li} \delta_{jq} - \delta_{lq} \delta_{ji}) = \\ &= \sum_{j,k,l=1}^3 \mathcal{J}_l \mathcal{J}_j^2 \omega_k \omega_j \omega_l e_{ljk} = \det \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \mathcal{J}_1 \omega_1 & \mathcal{J}_2 \omega_2 & \mathcal{J}_3 \omega_3 \\ \mathcal{J}_1^2 \omega_1 & \mathcal{J}_2^2 \omega_2 & \mathcal{J}_3^2 \omega_3 \end{bmatrix} = \omega_1 \omega_2 \omega_3 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1). \end{aligned}$$

ცნობილია (იხ., მაგ., [138], გვ. 233-235), რომ უკანასკნელი გამოსახულება განსაზღვრავს ბზრიალას კუთხური სიჩქარის  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$  ვექტორის ევოლუციას დროში (დანარჩენი ინვარიანტები – კინეტიკური ენერგია და იმპულსის მომენტის კვადრატი – თავისუფალი ბზრიალას მოძრაობის ინტეგრალებია).

შემდგომში, როგორც ჩვეულებრივ [103-104], გამოვიყენებთ შეთანხმებას განმეორებული – *მუნჯი* – ინდექსებით აჯამების შესახებ და აღარ დავწერთ ჯამის სიმბოლოს.

2.13 შედეგის თანახმად, ტენზორების  $(\mathcal{F}_{ij}, \Omega_{ij})$  წყვილის ნებისმიერ 7 ინვარიანტს შორის არსებობს პოლინომური თანაფარდობა. იმ თანაფარდობის მოსაძებნად, რომელიც აკავშირებს (1) ფორმულებით განსაზღვრულ 6 ინვარიანტს იმპულსის მომენტის კვადრატთან, გამოვიყენოთ ბინე-კოშის თეორემა. ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე აგებულ (ორთონორმირებულ) კოორდინატთა სისტემაში ვპოულობთ:

$$(2) \quad \left\{ \det \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \mathcal{J}_1 \omega_1 & \mathcal{J}_2 \omega_2 & \mathcal{J}_3 \omega_3 \\ \mathcal{J}_1^2 \omega_1 & \mathcal{J}_2^2 \omega_2 & \mathcal{J}_3^2 \omega_3 \end{bmatrix} \right\}^2 = \det \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 & 2\mathcal{C}_{rot} & L^2 \\ 2\mathcal{C}_{rot} & L^2 & \mathcal{J}_k^3 \omega_k^2 \\ L^2 & \mathcal{J}_k^3 \omega_k^2 & \mathcal{J}_k^4 \omega_k^2 \end{bmatrix} = [\operatorname{tr}(\mathcal{F} \Omega \mathcal{F}^2 \Omega^2)]^2;$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \mathcal{J}_k^2 \omega_k^2 &= L^2 = \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^2) + \bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F}^2, \\ \mathcal{J}_k^3 \omega_k^2 &= \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^3) + \bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F}^3, \\ \mathcal{J}_k^4 \omega_k^2 &= \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^4) + \bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F}^4, \end{aligned}$$

ხოლო ინვარიანტები  $\operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^3)$  და  $\operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^4)$  გამოითვლება ჰამილტონ-კელის განტოლების

$$\mathcal{F}^3 - \mathcal{F}^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} + \mathcal{F} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) - E_3 \cdot \det \mathcal{F} = 0$$

და (1) და (3) ფორმულების გამოყენებით ( $E_3 \in M_3(\mathbb{R})$ ) არის ერთეულოვანი  $3 \times 3$  მატრიცა). ვპოულობთ იგივეობას

$$\begin{aligned} (4) \quad \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^3) &= \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^2) \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} - \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}) \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) + \operatorname{tr}(\Omega^2) \cdot \det \mathcal{F} = \\ &= L^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} - 2\mathcal{C}_{rot} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) + \bar{\omega}^2 (-\operatorname{tr} \mathcal{F}^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} + \operatorname{tr} \mathcal{F} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) - 2 \det \mathcal{F}), \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\mathcal{J}_k^3 \omega_k^2 = \bar{\omega}^2 (\operatorname{tr} \mathcal{F}^3 - \operatorname{tr} \mathcal{F}^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} + \operatorname{tr} \mathcal{F} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) - 2 \det \mathcal{F}) - 2\mathcal{C}_{rot} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) + L^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F}$$

და, ჰამილტონ-კელის განტოლების გათვალისწინებით, გამარტივებების შემდეგ ვღებულობთ

$$(5) \quad \mathcal{J}_k^3 \omega_k^2 = \bar{\omega}^2 \cdot \det \mathcal{F} - 2\mathcal{C}_{rot} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) + L^2 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F}.$$

ანალოგიურად, ჰამილტონ-კელის განტოლებიდან ვპოულობთ

$$(6) \quad \mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^3 \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} - \mathcal{F}^2 \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) + \mathcal{F} \cdot \det \mathcal{F}.$$

აქედან, (3) და (4) გათვალისწინებით,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k^4 \omega_k^2 &= \bar{\omega}^2 \operatorname{tr} \mathcal{F}^4 + \operatorname{tr}(\Omega^2 \mathcal{F}^4) = L^2 [(\operatorname{tr} \mathcal{F})^2 - \Delta_2(\mathcal{F})] - 2\mathcal{C}_{rot} [\Delta_2(\mathcal{F}) \cdot \operatorname{tr} \mathcal{F} - \det \mathcal{F}] + \\ &+ \bar{\omega}^2 [\operatorname{tr} \mathcal{F}^4 + \operatorname{tr} \mathcal{F}^2 \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) - \operatorname{tr} \mathcal{F}^2 \cdot (\operatorname{tr} \mathcal{F})^2 + (\operatorname{tr} \mathcal{F})^2 \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) - 3 \operatorname{tr} \mathcal{F} \cdot \det \mathcal{F}], \end{aligned}$$

საიდანაც, (6) ტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$(7) \quad \mathcal{J}_k^4 \omega_k^2 = \bar{\omega}^2 \det \mathcal{S} \cdot \text{tr} \mathcal{S} + 2\mathcal{E}_{rot} [\det \mathcal{S} - \Delta_2(\mathcal{S}) \cdot \text{tr} \mathcal{S}] + L^2 [(\text{tr} \mathcal{S})^2 - \Delta_2(\mathcal{S})].$$

(5) და (7) მნიშვნელობების შეტანა (2) ფორმულაში და გამარტივება ჰამილტონ-კელის და  $\Delta_2(\mathcal{S}) = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_3 \mathcal{J}_1 = (\text{tr}^2 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^2) / 2$  ფორმულების გამოყენებით გვაძლევს:

$$(8) \quad [\text{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^2 \Omega^2)]^2 = \det \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 & 2\mathcal{E}_{rot} & L^2 \\ 2\mathcal{E}_{rot} & L^2 & A + \bar{\omega}^2 \det \mathcal{S} \\ L^2 & A + \bar{\omega}^2 \det \mathcal{S} & B + \bar{\omega}^2 \det \mathcal{S} \cdot \text{tr} \mathcal{S} \end{bmatrix},$$

სადაც

$$A = L^2 \text{tr} \mathcal{S} - \mathcal{E}_{rot} [(\text{tr} \mathcal{S})^2 - \text{tr} \mathcal{S}^2],$$

$$B = L^2 [(\text{tr} \mathcal{S})^2 + \text{tr} \mathcal{S}^2] / 2 + 2\mathcal{E}_{rot} [\text{tr} \mathcal{S}^3 - (\text{tr} \mathcal{S})^3] / 3.$$

(8) ფორმულის მარჯვენა მხარეში გვაქვს  $\bar{\omega}^2(t) = -\frac{1}{2} \text{tr}^2 \Omega(t)$  ცვლადის კუბური პოლინომი

$$(9) \quad [\text{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^2 \Omega^2)]^2 = -(\bar{\omega}^2)^3 \cdot \det^2 \mathcal{S} + c_1 (\bar{\omega}^2)^2 - c_2 \bar{\omega}^2 + c_3.$$

ამ პოლინომის კოეფიციენტები განისაზღვრება ინვარიანტებით  $\text{tr} \mathcal{S}^\lambda$ ,  $\lambda = \overline{1,3}$ , და  $L^2$ ,  $\mathcal{E}_{rot}$ , რომლებიც თავისუფალი ბზრიალასათვის მოძრაობის ინტეგრალებიცაა:

$$\det \mathcal{S} = \text{tr} \mathcal{S}^3 / 3 - \text{tr} \mathcal{S} \cdot \text{tr} \mathcal{S}^2 / 2 + \text{tr}^3 \mathcal{S} / 6,$$

$$c_1 = \det \mathcal{S} [2\mathcal{E}_{rot} (\text{tr}^2 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^2) - L^2 \text{tr} \mathcal{S}],$$

$$c_2 = \mathcal{E}_{rot}^2 [(\text{tr}^2 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^2)^2 + 4 \text{tr} \mathcal{S} \cdot \det \mathcal{S}] - 2\mathcal{E}_{rot} L^2 (\text{tr}^3 \mathcal{S} - 2 \text{tr} \mathcal{S} \cdot \text{tr} \mathcal{S}^2 + \text{tr} \mathcal{S}^3) + \frac{1}{2} L^4 (\text{tr}^2 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^2),$$

$$c_3 = (8/3) \mathcal{E}_{rot}^3 (\text{tr}^3 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^3) - 2\mathcal{E}_{rot}^2 L^2 (3 \text{tr}^2 \mathcal{S} - \text{tr} \mathcal{S}^2) + 4\mathcal{E}_{rot} L^4 \text{tr} \mathcal{S} - L^6.$$

ცხადია, (9) პოლინომის  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ფესვებიც განისაზღვრება ამავე  $\text{tr} \mathcal{S}$ ,  $\text{tr} \mathcal{S}^2$ ,  $\text{tr} \mathcal{S}^3$ ,  $L^2$ ,  $\mathcal{E}_{rot}$  ინვარიანტებით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(10) \quad \lambda_k = \frac{[2\mathcal{E}_{rot} \text{tr} \mathcal{S} - L^2] \mathcal{J}_k - 2\mathcal{E}_{rot} \mathcal{J}_k^2}{\det \mathcal{S}} \quad (k = \overline{1,3})$$

და

$$(11) \quad [\text{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^2 \Omega^2)]^2 = (\lambda_1 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_2 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_3 - \bar{\omega}^2) \cdot \det^2 \mathcal{S}.$$

(1) ინვარიანტებისათვის მოძრაობის განტოლების მისაღებად ვისარგებლოთ ეილერის დინამიური განტოლებებით (იხ., მაგ., [138], გვ. 230)

$$(12) \quad \mathcal{J}_1 \dot{\omega}_1 + (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2) \omega_2 \omega_3 = N_1, \quad \mathcal{J}_2 \dot{\omega}_2 + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3) \omega_1 \omega_3 = N_2, \quad \mathcal{J}_3 \dot{\omega}_3 + (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1) \omega_1 \omega_2 = N_3$$

(აქ  $N_1, N_2, N_3$  აღნიშნავს გარეშე ძალის მომენტის  $\vec{N}$  ვექტორის პროექციებს ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე;  $\dot{\omega}_k \equiv d\omega_k/dt$ ,  $k = \overline{1,3}$ ).

(12) სისტემის  $k$ -ური განტოლება გავამრავლოთ  $\mathcal{J}_k^{\mu-1} \omega_k$ -ზე,  $k = \overline{1,3}$ , და ავჯამოთ. მივიღებთ

$$(13) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{J}_k^\mu \omega_k^2 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1^{\mu-1} & \mathcal{J}_2^{\mu-1} & \mathcal{J}_3^{\mu-1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 N_k \mathcal{J}_k^{\mu-1} \omega_k,$$

რაც, (3) და (1) ფორმულების გათვალისწინებით, შეიძლება ჩავეწეროთ შემდეგი სახით:

$$(14) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \text{tr}(\mathcal{S}^\mu \Omega^2) - \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{S}^\mu \text{tr} \Omega^2 \right) + \text{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^{\mu-1} \Omega^2) = \langle \vec{N} \mathcal{S}^{\mu-1} \bar{\omega} \rangle.$$

ორთოგონალური ინვარიანტებით ჩაწერილი განტოლება (14) მართებულია კოორდინატთა ნებისმიერ ორთონორმირებულ სისტემაში და არა მხოლოდ ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში. კერძო შემთხვევებში, როცა  $\mu=1,2$ , გამოსახულებები (13)-(14) დაიყვანება შემდეგ თანაფარდობებზე:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{rot} = \langle \vec{N} \vec{\omega} \rangle, \quad \frac{d}{dt} L^2 = 2 \langle \vec{N} \mathcal{S} \vec{\omega} \rangle = 2 \langle \vec{N} \vec{L} \rangle,$$

რომლებიც თავისუფალი ბზრიალასათვის გვაძლევს მოძრაობის ინტეგრალებს – ენერგიას და იმპულსის მომენტის კვადრატს.

$\mu=0$  შემთხვევაში (13)-(14) ფორმულებიდან გვაქვს:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1^{-1} & \mathcal{J}_2^{-1} & \mathcal{J}_3^{-1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 N_k \mathcal{J}_k^{-1} \omega_k.$$

გავითვალისწინოთ, რომ, (11) ფორმულის თანახმად,

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1^{-1} & \mathcal{J}_2^{-1} & \mathcal{J}_3^{-1} \end{bmatrix} &= \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3} \det \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1^2 & \mathcal{J}_2^2 & \mathcal{J}_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det^{-1} \mathcal{S} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1^2 & \mathcal{J}_2^2 & \mathcal{J}_3^2 \end{bmatrix} = \\ &= \det^{-1} \mathcal{S} \operatorname{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^2 \Omega^2) = [(\lambda_1 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_2 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_3 - \bar{\omega}^2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

შედგად, მივიღებთ განტოლებას:

$$(16) \quad \frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}^2}{dt} + [(\lambda_1 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_2 - \bar{\omega}^2) \cdot (\lambda_3 - \bar{\omega}^2)]^{1/2} = \langle \vec{N} \mathcal{S}^{-1} \vec{\omega} \rangle$$

(ტენზორი  $\mathcal{S}^{-1}: E^3 \rightarrow E^3$  არსებობს, რადგან, ამოცანის პირობის თანახმად,  $\det(\mathcal{S}) = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 > 0$ ).

თავისუფალი ბზრიალასათვის (16) დაიყვანება განტოლებაზე ვაიერშტრასის ელიფსური  $P(t)$  ფუნქციისათვის (იხ., მაგ., [132], 18.1.7):

$$P'^2(t) = 4(P(t) - e_1)(P(t) - e_2)(P(t) - e_3). \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0)$$

ამისათვის საკმარისია (16) განტოლებაში შევასრულოთ კარდანოს ჩასმა (იხ., მაგ., [151])

$$(17) \quad \bar{\omega}^2(t) = -P(t) + \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -P(t) + \frac{2\mathcal{E}_{rot}(\operatorname{tr}^2 \mathcal{S} - \operatorname{tr} \mathcal{S}^2) - L^2 \operatorname{tr} \mathcal{S}}{3 \det \mathcal{S}},$$

რის შედეგადაც (11) პოლინომში განუღებება  $P^2(t)$  წევრის კოეფიციენტი.

ამონახსნი (17) და ინვარიანტები  $\mathcal{E}_{rot}$ ,  $L^2$ ,  $\operatorname{tr} \mathcal{S}$ ,  $\operatorname{tr} \mathcal{S}^2$ ,  $\operatorname{tr} \mathcal{S}^3$  რაციონალურად განსაზღვრავს ([138], გვ. 234) კუთხური სიჩქარის პროექციებს ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე:

$$(18) \quad \begin{aligned} \omega_1^2 &= \Omega_{23}^2 = \frac{\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2}{D^{1/2}} \left( \bar{\omega}^2 \mathcal{J}_1^{-1} \det \mathcal{S} - 2\mathcal{E}_{rot} [\operatorname{tr} \mathcal{S} - \mathcal{J}_1] + L^2 \right), \\ \omega_2^2 &= \Omega_{31}^2 = \frac{\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1}{D^{1/2}} \left( \bar{\omega}^2 \mathcal{J}_2^{-1} \det \mathcal{S} - 2\mathcal{E}_{rot} [\operatorname{tr} \mathcal{S} - \mathcal{J}_2] + L^2 \right), \\ \omega_3^2 &= \Omega_{12}^2 = \frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1}{D^{1/2}} \left( \bar{\omega}^2 \mathcal{J}_3^{-1} \det \mathcal{S} - 2\mathcal{E}_{rot} [\operatorname{tr} \mathcal{S} - \mathcal{J}_3] + L^2 \right). \end{aligned}$$

აქ  $D$  აღნიშნავს  $\mathcal{S}$  ტენზორის მახასიათებელი პოლინომის დისკრიმინანტს ([59], გვ. 190):

$$(19) \quad D = [(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1)(\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1)]^2 = \det \left[ \operatorname{tr}(\mathcal{S}^{i+k-2}) \right]_{i,k=1,3},$$

ამასთან, II.11 თეორემის თანახმად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ  $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_2 < \mathcal{J}_3$ ,  $\Omega_{12} > 0$ ,  $\Omega_{13} > 0$ , ხოლო  $\Omega_{23} = \omega_1$  პროექციის ნიშანი განისაზღვრება  $\operatorname{tr}(\mathcal{S} \Omega \mathcal{S}^2 \Omega^2)$  ინვარიანტის ნიშნით.

### §5.2. რელატივისტური ბრუნვა

რელატივისტური ბრუნვის განხილვას ეძღვნება ნაშრომები [94], [95a, b], [145]-[147]. ამ გამოკვლევების ერთ-ერთი მიზანია ენერჯისა და იმპულსის მომენტის კვადრატის კორექტული რელატივისტური გამოთვლა. ეს ფიზიკური სიდიდეები, როგორც გვიჩვენა წინა პარაგრაფში ჩატარებულმა განხილვამ, არის სამგანზომილებიანი ორთოგონალური ინვარიანტების ბაზისის ელემენტები და, ამავე დროს, წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალებს ფიზიკური ამოცანების ფართო კლასისათვის.

როგორც ცნობილია, რელატივისტური მიდგომა არ არის თავსებადი აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნებასთან [100], [142]. ამდენად, ციტირებულ შრომებში ფაქტობრივად განიხილება დამოუკიდებელი ნაწილაკებით შედგენილი სისტემა, რომლის ნაწილები ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო ერთნაირი კუთხური სიჩქარეებით. ასეთი სისტემების მდგრადობასთან დაკავშირებული საკითხები ამ გამოკვლევებში არ განიხილება.

შესრულებულმა გამოთვლებმა აჩვენა [94], რომ, როგორც ეს მოსალოდნელიც იყო, რელატივისტური სისტემის ენერჯია და იმპულსის მომენტი არაწრფივად არის დამოკიდებული კუთხურ სიჩქარეზე. ნაპოვნია მიღებული გამოსახულებების არარელატივისტური ზღვარი შესაბამისი შესწორებებით და ინერჯიის მომენტების დაზუსტებული მნიშვნელობები სხვადასხვა გეომეტრიისა და მასათა განაწილების მქონე სისტემებისათვის.

ნაშრომში [145] შესწავლილია წერტილოვანი ობიექტის იძულებითი ბრუნვა მუდმივი კუთხური სიჩქარით უძრავი ცენტრის გარშემო. ცხადია, ამოცანის ასეთი დასმისას იმპულსის მომენტი არ არის მოძრაობის ინტეგრალი. შრომებში [146], [147] განიხილება რელატივისტური ბრუნვის გავლენა ობიექტის გეომეტრიაზე და მისი კავშირი გრავიტაციასთან. ჩვენს მიერ შესრულებული გამოთვლები [95a, b] აჩვენებს, რომ იმპულსის მომენტის მუდმივობის პირობა არღვევს [145] შრომაში ნაპოვნი რადიალური მოძრაობის პერიოდულობას.

განვიხილოთ ბრუნვის ელიფსოიდი  $V$  ნახევარდერძებით  $a_1 = a_{\parallel}$ ,  $a_2 = a_3 = a_{\perp}$  და მასათა სიმკვრივით  $\rho(\vec{r})$ ,  $\vec{r} \in V$  ათვლის იმ სისტემაში, რომლის მიმართაც ის უძრავია – ელიფსოიდის საკუთარ ათვლის სისტემაში. თუ ასეთი ელიფსოიდი ბრუნავს სიმეტრიის  $OZ$  ღერძის გარშემო  $\omega$  კუთხური სიჩქარით (ნახ. 1), მისი ენერჯია  $\mathcal{E}$  და იმპულსის მომენტის ვექტორი  $\vec{L}$  გამოითვლება ფორმულებით (იხ., მაგ., [100]):

$$(20) \quad \mathcal{E} = c^2 \int_V \gamma dm,$$

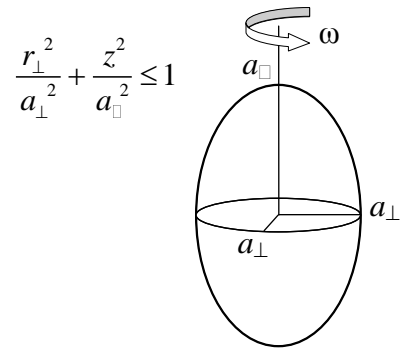
$$(21) \quad L = L_z = \int_V (x dp_y - y dp_x) = \int_V \gamma (x v_y - y v_x) dm = \omega \int_V \gamma r_{\perp}^2 dm,$$

სადაც  $dm = \rho dV$  არის ელიფსოიდის  $dV = r_{\perp} dr_{\perp} dz d\phi$  მოცულობის ელემენტის მასა საკუთარ ათვლის სისტემაში;  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = z(1 - \omega^2(r_{\perp}^{(L)})^2/c^2)^{-1/2}$  რელატივისტური ფაქტორია;  $r_{\perp}$  და  $\phi$  აღნიშნავს  $dm$  ელემენტის დაშორებას ბრუნვის  $OZ$  ღერძიდან და აზიმუტალურ კუთხეს ელიფსოიდის საკუთარ სისტემაში. ლაბორატორიულ სისტემაში შესაბამის სიდიდეებს მიუვწეროთ ( $L$ ) ინდექსს.

ცხადია, რომ ნებისმიერი სიჩქარით ბრუნვისას  $r_{\perp}^{(L)} = r_{\perp}$ ,  $z^{(L)} = z$ . ამასთან, ლორენცის გარდაქმნების მიმართ მასის ინვარიანტობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$dm = \rho^{(L)} dV^{(L)} = \rho dV = \rho r_{\perp} dr_{\perp} dz d\phi.$$

მაშასადამე, ინტეგრალები (20) და (21) შეიძლება გამოვითვალოთ ელიფსოიდის საკუთარ სისტემაში.



ნახ. 1.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

**მაგალითი 1.** დაუშვათ,

$$(22) \quad \rho(\vec{r}) = \rho = m_0 / V = m_0 / (4\pi a_{\perp} a_{\parallel}^2 / 3).$$

მაშინ (იხ. [94])

$$(23) \quad \mathcal{E} = \rho c^2 \int_V \left(1 - r_{\perp}^2 \omega^2 / c^2\right)^{-1/2} r_{\perp} dr_{\perp} dz d\phi = (3m_0 c^2 / 2) \beta^{-2} \{2 - I_1\},$$

$$(24) \quad L = \rho \omega \int_V \left(1 - r_{\perp}^2 \omega^2 / c^2\right)^{-1/2} r_{\perp}^3 dr_{\perp} dz d\phi = (m_0 c a_{\perp} / 2) \beta^{-3} \{4 - (\beta^2 + 2)I_1 + \beta^2 I_2\},$$

სადაც  $\beta = \omega^2 a_{\perp}^2 / c^2$  და (იხ., მაგ., [130], (2.272.2), (2.271.3), გვ. 100)

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^2 \xi^2} d\xi = 1 + \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta},$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \xi^2 \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^2 \xi^2} d\xi = \frac{1 + \beta^2}{4\beta^2} - \frac{(1 - \beta^2)^2}{8\beta^3} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

ამ გამოსახულებების შეტანა (23) და (24) ინტეგრალებში მოგვცემს:

$$(25) \quad \mathcal{E} = (3m_0 c^2 / 2) \beta^{-2} \left\{1 - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right\} = (3m_0 c^2 / 2) \beta^{-2} \left\{1 - \frac{2\vartheta}{\text{sh}2\vartheta}\right\},$$

$$(26) \quad L = (3m_0 a_{\perp} c / 8) \beta^{-3} \left\{3 - \beta^2 - \frac{(1 - \beta^2)(3 + \beta^2)}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right\} = (3m_0 a_{\perp} c / 8) \beta^{-3} \left\{3 - \beta^2 - (3 + \beta^2) \frac{2\vartheta}{\text{sh}2\vartheta}\right\},$$

სადაც, როგორც ჩვეულებრივ, აღვნიშნეთ  $\text{th}\vartheta = \beta$ . ცხადია,  $\vartheta \in [0, +\infty)$ , როდესაც  $\beta \in [0, +1)$ . ამრიგად, მივდივართ მნიშვნელოვან დასკვნამდე [94]: არც ენერგია  $\mathcal{E}$  და არც მომენტი  $L$  არ არის დამოკიდებული ელიფსოიდის  $a_{\perp}$  ნახევარღერძის სიდიდეზე, რომლის გარშემო ხდება ბრუნვა (თუ ბრუნვის ღერძი ემთხვევა ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძს), ე.ი.  $\mathcal{E}$  და  $L$  არ არის დამოკიდებული ელიფსოიდის ექსცენტრისიტეტზე. კერძოდ, (25) და (26) ფორმულები სამართლიანი რჩება დიამეტრის გარშემო მბრუნავი ერთგვაროვანი ბირთვისათვის (ამ შემთხვევაში  $a_{\perp} = a_{\parallel} = R$ , სადაც  $R$  ბირთვის რადიუსია) და ბრტყელი დისკოსათვისაც, რომელიც ბრუნავს მისი სიბრტყის მართობული სიმეტრიის ღერძის გარშემო (ამ შემთხვევაში  $a_{\perp} = 0$ ,  $a_{\parallel} = R$ , სადაც  $R$  დისკოს რადიუსია).

აღვილი შესამოწმებელია, რომ (25) და (26) გამოსახულებებს აქვს სწორი არარელატივისტური ზღვარი. კერძოდ [94]:

$$(27) \quad \mathcal{E}|_{\beta \ll 1} = m_0 c^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{2k} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} \right\} = m_0 c^2 + \frac{\beta \omega^2}{2} \left\{ 1 + \frac{3}{7} \beta^2 + O(\beta^4) \right\},$$

$$(28) \quad L|_{\beta \ll 1} = \frac{2m_0 a_{\perp}^2}{5} \omega \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{2k} \frac{15(k+1)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \right\} = \beta \omega \left\{ 1 + \frac{2}{7} \beta^2 + O(\beta^4) \right\},$$

სადაც  $\beta = (2/5)m_0 a_{\perp}^2$  არის ელიფსოიდის ინერციის მომენტი (ბრუნვის  $OZ$  ღერძის მიმართ).

ბევრად უფრო საინტერესოა ულტრარელატივისტური ზღვარი. ღოგართმული განზღაბლობა  $\beta = 1$  ვერტიკალში არ არის არსებითი  $(1 - \beta^2)$  მამრავლის გამო და ვპოულობთ [94]:

$$(29) \quad \mathcal{E}|_{\beta=1-\delta} \approx 3m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{2} + \delta + \frac{\delta}{2} \ln \frac{\delta}{2} \right\},$$

$$(30) \quad L|_{\beta=1-\delta} \approx 3m_0 c a_{\perp} \left\{ \frac{1}{4} + \delta + \frac{\delta}{2} \ln \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (\delta \ll 1)$$

**შენიშვნა 1.** ფორმულები (26), (28) და (30) ადვილად გადაიწერება ნებისმიერად ორიენტირებულ კოორდინატთა სისტემაში (თუ კუთხური სიხარვე კოლინეალური რჩება სიმეტრიის ღერძისა,  $\vec{m} = [\vec{a}_\perp \vec{\beta}]$ ).

**მართლაც,** პირდაპირი შემოწმება გვიჩვენებს, რომ კოორდინატთა იმ სისტემაში, რომლის  $OZ$  ღერძი კოლინეარულია ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძისა, სამგანზომილებიანი ვექტორი (ფიგურულ ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულება, ცხადია, ინვარიანტია)

$$(26') \quad \vec{L} = \vec{m} \left\{ \frac{\mathcal{E} a_\perp^2 [1 + 3\beta^{-2}(1 - m_0 c^2 / \mathcal{E})]}{4c^2} \right\} = [\vec{a}_\perp \vec{\beta}] \left\{ \frac{\mathcal{E} + 3\beta^{-2}(\mathcal{E} - m_0 c^2)}{4c} \right\}$$

დაიყვანება (26) ფორმულით განსაზღვრულ სიდიდეზე. (26') ფორმულის ორთოგონალური კოვარიანტობის გამო, ის სამართლიანი რჩება ნებისმიერად ორიენტირებულ კოორდინატთა სისტემაში. მსგავსადვე მოწმდება ფორმულები

$$(28') \quad \vec{L}|_{\beta=1} = \frac{2}{5} \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{m} a_\perp^2 \left\{ 1 + \frac{3}{35} \beta^2 + O(\beta^4) \right\},$$

$$(30') \quad \vec{L}|_{\beta=1-\delta} = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{m} a_\perp^2 \left\{ 1 + \frac{3}{(1-\delta)^2} - \frac{2}{1-\delta(\ln 2 - \ln \delta)} \right\}. \quad (\delta \ll 1) \quad \blacksquare$$

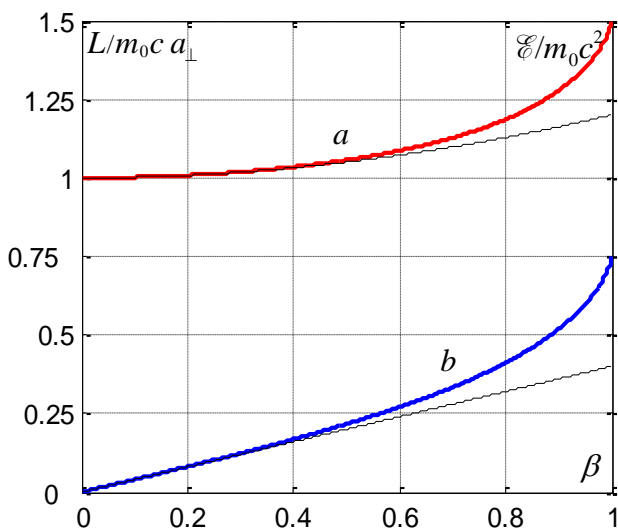
დამოკიდებულებები  $\mathcal{E}(\beta)$  (იხ. ფ-ლა (25)) და  $L(\beta)$  (იხ. ფ-ლა (26)) პარამეტრული ფორმით განსაზღვრავს სისტემის ჰამილტონიანს  $\mathcal{H} = \mathcal{E}(L)$ . ადვილად, რომ დამოკიდებულება  $\mathcal{E}(L)$  – “რეჯეს ტრაექტორია” – მცირე სიხარვეების შემთხვევაში კვადრატულია რელატივისტური შესწორების სიზუსტით):

$$(31) \quad \mathcal{E} - m_0 c^2 = (L^2 / 2\mathcal{E}) \{1 - \beta^2 / 7 + O(\beta^4)\},$$

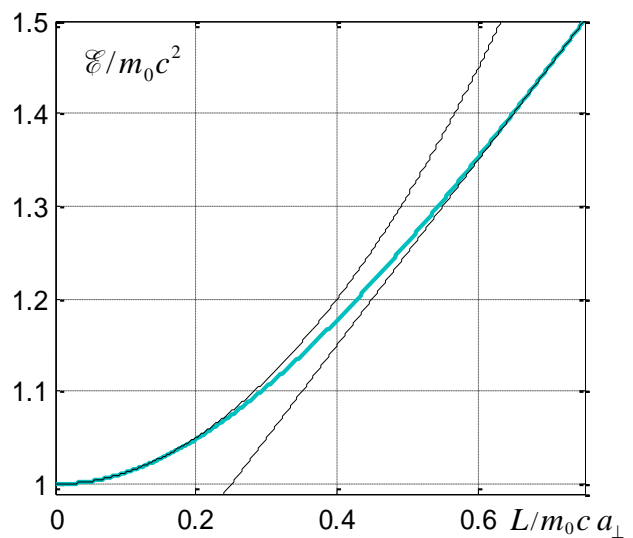
ხოლო ულტრარელატივისტურ ზღვარში ხდება ასიმპტოტურად წრფივი:

$$(32) \quad \mathcal{E}|_{\beta=1-\delta} = (3/4)m_0 c^2 + (c/a_\perp)L|_{\beta=1-\delta}. \quad (\delta \ll 1)$$

შესაბამისი გრაფიკები ნაჩვენებია ქვემოთ. ნახ.3-ზე აღნიშნულია არარელატივისტური და ულტრარელატივისტური ასიმპტოტური  $\mathcal{E}(L)$  დამოკიდებულებებიც.



ნახ. 2. მბრუნავი ელიფსოიდის ენერჯის (a) და იმპულსის მომენტის (b) დამოკიდებულება ეკვატორულ სიხარვეზე



ნახ. 3. მბრუნავი ელიფსოიდის ენერჯის დამოკიდებულება იმპულსის მომენტზე – რეჯეს ტრაექტორია (ჰამილტონიანი)

შეგნიშნოთ, რომ ვინაიდან მასათა ცენტრი უძრავია ათვლის ლაბორატორიული სისტემის მიმართ (სისტემის იმპულსი  $\vec{p}^{(L)}=0$ ), ენერჯის გამოთვლილი მნიშვნელობა შორს მყოფმა დამკვირვებელმა უნდა დაუკავშიროს სისტემის ექსპერიმენტულად დამზერილ მასას, ხოლო იმპულსის მომენტის მნიშვნელობა – ექსპერიმენტულად დამზერილ საკუთარ მომენტს.

შრომაში [94] აღნიშნულია, რომ ულტრარელატივისტურ ზღვარში გვაქვს:

$$\mathcal{E}|_{\beta=1} = mc^2 = \frac{3m_0c^2}{2}, \Rightarrow m = 3m_0/2, L|_{\beta=1} = \frac{3m_0a_{\perp}^2}{4} \omega_{\max} = \frac{3m_0a_{\perp}c}{4}.$$

თუ ამ ფორმულებში შევიტანთ ელემენტარული ფერმიონის საკუთარი იმპულსის მომენტის – სპინის – მნიშვნელობას  $L = \hbar/2$ , მივიღებთ [94]:

$$(33) \quad a_{\perp} = \frac{\hbar}{mc}.$$

როგორც აღნიშნულია ნაშრომში [94], “მბრუნავი ფერმიონის რადიუსის” ასეთი თანხვედრა კომპტონის ტალღის სიგრძესთან და არანაკლებ შთამბეჭდავი თანაფარდობა

$$(34) \quad \hbar\omega_{\max} = mc^2$$

შესაძლოა, არ არის შემთხვევითი, არამედ ასახავს ბუნების ღრმა კანონზომიერებებს.

**მაგალითი 2.** შრომაში [94] გაანალიზებულია სისტემის ენერჯისა და იმპულსის მომენტის სასრულობის მიზეზი  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარში: ჩვენი აზრით, “სხეულის ეკვატორზე”, რომელიც წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, განლაგებულია უგულვებელსაყოფად მცირე მასა, ხოლო “სხეულის” დანარჩენ წერტილებს სიჩქარე აქვთ სინათლის სიჩქარეზე ნაკლები. ამ მოსაზრების შესამოწმებლად შრომაში [94] გამოთვლილია სასრული სისტემის მბრუნავი გარსის ენერჯია და იმპულსის მომენტი.

ვთქვათ,

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_1, & \vec{r} \in V_1, \\ \rho, & \vec{r} \in V_2, V = V_1 \cup V_2, \end{cases}$$

სადაც  $V_1$  და  $V$  არის კოაქსიალური ელიფსოიდები და  $a_{\square}^{(1)} \leq a_{\square}$ ,  $a_{\perp}^{(1)} = ka_{\perp}$ ,  $k \leq 1$ . ცხადია, საზოგადოდ ეს ელიფსოიდები არ არის თანაფოკუსური (ნახ. 4). წინა მაგალითში განხილულის საფუძველზე, გვაქვს [94]:

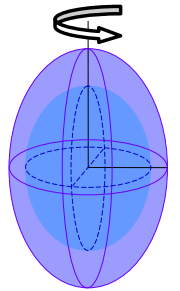
$$(35) \quad \mathcal{E} = \frac{3}{2} \frac{m_0 - m_1}{1 - k^2 a_{\square}^{(1)} / a_{\square}} c^2 \beta^{-2} \left\{ 1 - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{a_{\square}^{(1)}}{a_{\square}} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \left[ 1 - \frac{1 - k^2 \beta^2}{2\beta k} \ln \frac{1 + k\beta}{1 - k\beta} \right] \right\},$$

$$(36) \quad L = \frac{3}{8} \frac{m_0 - m_1}{1 - k^2 a_{\square}^{(1)} / a_{\square}} ca_{\perp} \beta^{-3} \left\{ 3 - \beta^2 - \frac{(1 - \beta^2)(3 + \beta^2)}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{a_{\square}^{(1)}}{a_{\square}} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \left[ 3 - k^2 \beta^2 - \frac{(1 - k^2 \beta^2)(3 + k^2 \beta^2)}{2\beta k} \ln \frac{1 + k\beta}{1 - k\beta} \right] \right\}.$$

აქ  $\beta = \omega a_{\perp} / c$ ,  $m_0 = (4\pi/3) \rho a_{\square} a_{\perp}^2 (1 - k^2 a_{\square}^{(1)} / a_{\square}) + m_1$ ,  $m_1 \equiv (4\pi/3) a_{\square}^{(1)} k^2 a_{\perp}^2 \rho_1$ . ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ ასეთი “ფენოვანი” ელიფსოიდის ენერჯია და იმპულსის მომენტი რჩება სასრული მაშინაც, როცა  $\beta \rightarrow 1$ . ეს სიდიდეები ხდება უსასრულო მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია ტოლობები

$$a_{\square}^{(1)} / a_{\square} = k^{-2} = (a_{\perp} / a_{\square}^{(1)})^2. \quad (m_0 - m_1 \neq 0.)$$

თანახმად უტოლობებისა  $a_1 \leq a$ ,  $k^{-2} \geq 1$ , ეს პირობები დაკმაყოფილებულია მხოლოდ მაშინ, როცა  $a_{\square}^{(1)} = a_{\square}$ ,  $a_{\perp} = a_{\perp}^{(1)}$ , ე. ი. როცა ბრუნავს მასიური უსასრულოდ თხელი ფენა. ასეთი გარსის ბრუნვა საჭიროებს ცალკე შესწავლას, რადგან სიმკვრივეები  $\rho$  და  $\rho_1$  ზემოთ განიხილებოდა, როგორც სასრული სიდიდეები.



ნახ. 4.



**მაგალითი 3.** განვიხილოთ შებრტყელებული ელიფსოიდის ზედაპირი და დავუშვათ  $dm = (m_0/S)dS$ , სადაც  $S$  აღნიშნავს ელიფსოიდის ზედაპირის ფართობს (ათვისის საკუთარ სისტემაში), ხოლო  $dS$  – ფართობის ელემენტს:

$$(37) \quad dS = 2\pi a_{\square} a_{\perp} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta, \quad a_{\perp} \geq a_{\square},$$

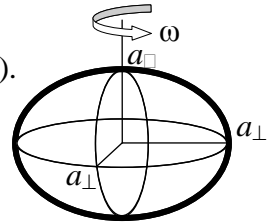
$$S = 2\pi a_{\square} a_{\perp} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) = 2\pi a_{\square} a_{\perp} \operatorname{ch} \chi \left( \frac{2\chi}{\operatorname{sh} 2\chi} + 1 \right) = \begin{cases} 4\pi a_{\perp}^2, & \varepsilon = 0, \\ 2\pi a_{\perp}^2, & \varepsilon = 1. \end{cases}$$

აქ

$$0 \leq \varepsilon = \sqrt{1 - a_{\square}^2/a_{\perp}^2} = \operatorname{th} \chi \leq 1$$

აღნიშნავს ექსცენტრისტეტს (შევიწყოთ, რომ  $a_{\square}(1-\varepsilon^2)^{-1/2} = a_{\square} \operatorname{ch} \chi = a_{\perp}$ ).  
ელიფსოიდის ზედაპირის განტოლების

$$r_{\perp} = a_{\perp} \sin \theta, \quad \frac{r_{\perp}^2}{a_{\perp}^2} + \frac{z^2}{a_{\square}^2} = 1,$$



ნახ. 5.

გათვალისწინებით (ნახ. 5), მივიღებთ

$$(38) \quad \mathcal{E} = m_0 c^2 \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{1-\beta^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta d\theta = m_0 c^2 \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} (1-\varepsilon^2 u)^{1/2} (1-\beta^2 u)^{-1/2} du =$$

$$= m_0 c^2 \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} F\left(\frac{1}{3/2}; -1/2, \varepsilon^2; 1/2, \beta^2\right),$$

$$L = m_0 a_{\perp} c \beta \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} \int_0^1 (1-u)^{1/2} (1-\varepsilon^2 u)^{1/2} (1-\beta^2 u)^{-1/2} du = m_0 a_{\perp} c \beta \frac{8\pi a_{\perp}^2}{3S} F\left(\frac{1}{5/2}; -1/2, \varepsilon^2; 1/2, \beta^2\right),$$

სადაც  $F\left(\frac{a}{c}; b_1, z_1; b_2, z_2\right) = F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}_2\right) = F_1(a; b_1, b_2, c; z_1; z_2)$  არის აპელის ორი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია (იხ. დისერტაციის IV თავი, ფორმულა (42), გვ. 104 და, მაგ., [62]). შევიწყოთ, რომ ფუნქციები  $F\left(\frac{1/2}{3/2}; -1/2, z_1; 1/2, z_2\right)$  და  $F\left(\frac{1/2}{5/2}; -1/2, z_1; 1/2, z_2\right)$  უკავშირდება I და II გვარის არასრულ ელიფსურ ინტეგრლებს (იხ. [60]).

აპელი ფუნქციების თვისებების თანახმად (იხ. IV თავი, ფ-ლა (102')),  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარში ორივე ეს ფუნქცია განშლადია ექსცენტრისტეტის ნებისმიერი  $0 \leq \varepsilon < 1$  მნიშვნელობისათვის, ხოლო  $\varepsilon = 1$  შემთხვევაში, ანუ “ორფენა დისკოსათვის” (იხ. ნახ. 5), ამავე (IV.72') ფორმულის ძალით და (37) გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$(39) \quad \mathcal{E}|_{\varepsilon=1} = m_0 c^2 \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} F\left(\frac{1}{3/2}; -1/2, 1; 1/2, \beta^2\right) = m_0 c^2 \frac{4\pi a_{\perp}^2}{S} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2)} F\left(\frac{1}{2}; 1/2, \beta^2\right) = \frac{2m_0 c^2}{1+\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$L|_{\varepsilon=1} = m_0 a_{\perp} c \beta \frac{8\pi a_{\perp}^2}{3S} F\left(\frac{1}{5/2}; -1/2, 1; 1/2, \beta^2\right) = m_0 a_{\perp} c \beta \frac{8\pi a_{\perp}^2}{3S} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(3)} F\left(\frac{1}{3}; 1/2, \beta^2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} m_0 a_{\perp} c \frac{(1-\beta^2)^{3/2} - 1 + 3\beta^2/2}{\beta^3}.$$

ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეში მდგარ გამოსახულებებს აქვს სასრული ზღვარი, როცა  $\beta \rightarrow 1$  და ვღებულობთ:

$$(40) \quad \mathcal{E}|_{\beta=1}^{\varepsilon=1} = 2m_0 c^2, \quad L|_{\beta=1}^{\varepsilon=1} = \frac{4}{3} m_0 a_{\perp} c = \frac{2a_{\perp}}{3c} \mathcal{E}|_{\beta=1}^{\varepsilon=1}.$$

ექსცენტრისიტეტის ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობისათვის გარსის ენერგია და იმპულსის მომენტი  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარში ხდება უსასრულო. მაგალითად, როცა  $\varepsilon=0$ , ანუ  $a_{\square}=a_{\perp}=R$  რადიუსის სფერული გარსისათვის გვაქვს [94]:

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m_0 c^2}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \\ L &= \frac{1}{2} m_0 \omega R^2 \left\{ \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1-\beta^2}{2\beta^3} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\} = \frac{1}{2} m_0 R c \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{\beta} \right\}, \end{aligned}$$

და  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარში ორივე ეს სიდიდე ლოგარითმულად განშლადია. მიუხედავად ამისა, მათ შორის არსებული მარტივი თანაფარდობა

$$L = \frac{R\mathcal{E}}{c} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} - \left( \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{-1} \right\}$$

სამართლიანი რჩება  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარშიც. კერძოდ, სფერული გარსისათვის (41) ფორმულებიდან ვღებულობთ (შეად. ფ-ლა (32)):

$$(42) \quad \mathcal{E}|_{\beta=1} = \frac{m_0 c^2}{2} + \frac{c}{R} L|_{\beta=1}.$$

**შენიშვნა 2.** ადვილი შესამოწმებელია, რომ გაჭიმული ელიფსოიდის თხელი მასიური ზედაპირის ენერგია და იმპულსის მომენტი გამოისახება ფორმულებით

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} &= \frac{4\pi a_{\perp} a_{\square}}{S} \sqrt{1-\varepsilon^2} F_A \left( \frac{1}{3/2}; -1/2, \frac{-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}; 1/2, \beta^2 \right) = \frac{4\pi a_{\perp} a_{\square}}{S\sqrt{1-\beta^2}} F_A \left( \frac{1/2}{3/2}; -1/2, \varepsilon^2; 1/2, \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} \right), \\ \frac{L}{m_0 a_{\perp} c \beta} &= \frac{8\pi a_{\perp} a_{\square}}{3S} \sqrt{1-\varepsilon^2} F \left( \frac{2}{5/2}; -1/2, \frac{-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}; 1/2, \beta^2 \right) = \frac{8\pi a_{\perp} a_{\square}}{3S\sqrt{1-\beta^2}} F \left( \frac{1/2}{5/2}; -1/2, \varepsilon^2; 1/2, \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} \right), \end{aligned}$$

და  $\beta \rightarrow 1$  ზღვარში განშლადია, თანაც მით უფრო სწრაფად, რაც უფრო დიდია ექსცენტრისიტეტი  $\varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . ეს ადასტურებს ზემოთ გამოთქმულ მოსაზრებას: გაჭიმული ელიფსოიდის ექსცენტრისიტეტის ზრდასთან ერთად, ცხადია, მატულობს ეკვატორის იმ მდამოს მასა, რომლის სიჩქარეც ახლოსაა სინათლის სიჩქარესთან.

ახლა განვიხილოთ ისეთი სხეულის ბრუნვა, რომელსაც სიმეტრიის ღერძი არ აქვს.

**მაგალითი 4.** ვთქვათ,  $m_0$  მასის და  $l=2b$  სიგრძის (საკუთარ ათვლის სისტემაში) ერთგვაროვანი წვრილი ღერო ბრუნავს  $XOY$  სიბრტყეში  $\omega$  კუთხური სიჩქარით, მასათა ცენტრზე გამავალი  $OZ$  ღერძის გარშემო. ასეთი სისტემის  $\mathcal{E}$  ენერგიისა და  $L$  იმპულსის მომენტის გამოთვლა (20) და (21) ფორმულებით გვაძლევს [94]:

$$(44) \quad \mathcal{E} = m_0 c^2 \beta^{-1} \arcsin \beta, \quad L = (m_0 c b / 2) \beta^{-2} \left( \arcsin \beta - \beta \sqrt{1-\beta^2} \right).$$

ულტრარელატივისტურ ზღვარში  $\beta \rightarrow 1$  აქედან ვპოულობთ:

$$\mathcal{E}|_{\beta \rightarrow 1} = (m_0 c^2 / \beta) \arcsin \beta|_{\beta \rightarrow 1} = (\pi/2) m_0 c^2, \quad L|_{\beta \rightarrow 1} = (m_0 c b / 2 \beta^2) \left[ \arcsin \beta - \beta (1-\beta^2)^{1/2} \right]|_{\beta \rightarrow 1} = (\pi/4) m_0 c b.$$

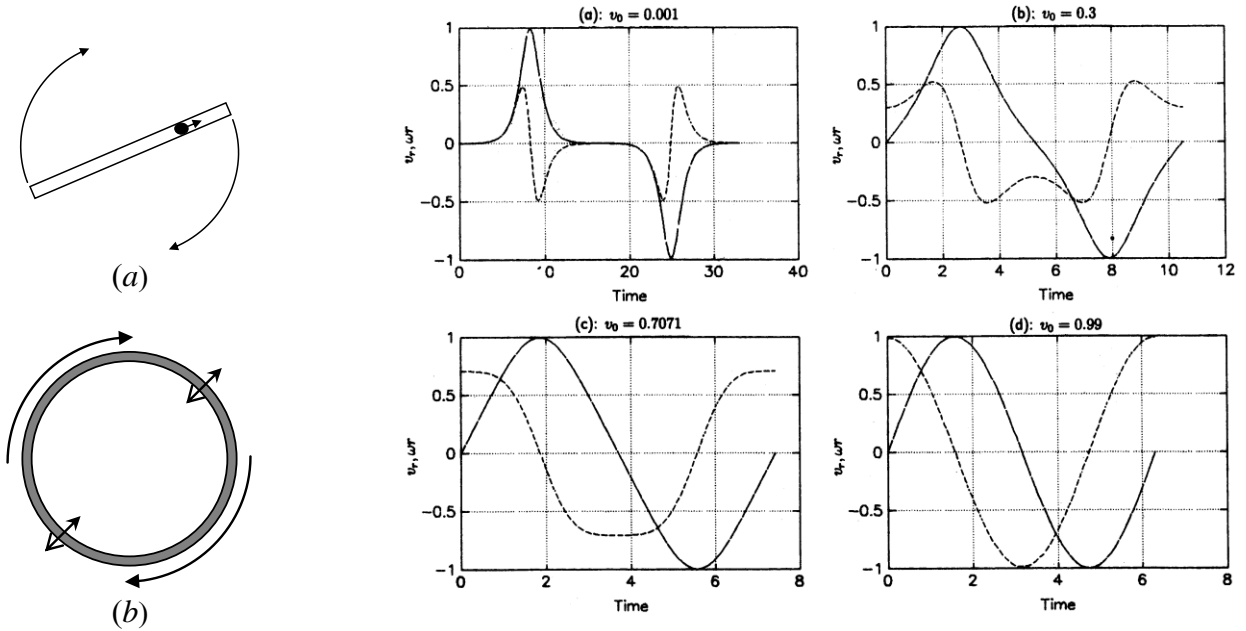
ამ ფორმულებიდან ცხადია, რომ ულტრარელატივისტურ ზღვარში მბრუნავი ღეროს “რეჯეს ტრაექტორია”  $\mathcal{E}(L)$  ხდება წრფივი:

$$\mathcal{E}|_{\beta \rightarrow 1} = (2cL/b)|_{\beta \rightarrow 1}.$$

**შენიშვნა 3.** ფორმულები (44) ასევე შეიძლება ჩავწეროთ ნებისმიერად ორიენტირებულ კოორდინატთა სისტემაში (თუ  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ). ამასთან, ენერგია, როგორც სამგანზომილებიანი ორთოგონალური ინვარიანტი, არ იცვლება, ხოლო იმპულსის მომენტისათვის გვაქვს:

$$(45) \quad \vec{L} = \frac{[\vec{b}\vec{\beta}]}{2} \frac{\mathcal{E}/c - m_0 c \sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} = \frac{\vec{a} b^2}{2} \frac{\mathcal{E}/c - m_0 c \sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}.$$

ნაშრომში [145] გ. მაჩაბელმა და ა. როგავამ განიხილეს მუდმივი კუთხური სიჩქარით რელატივისტურად მბრუნავი წვრელი უმასო მილი, რომელშიც წინააღმდეგობის გარეშე შეუძლია მოძრაობა მცირე “ნამცეცს” (ნახ. 6). ამ შრომაში ნაჩვენებია, რომ “ნამცეცის” რადიალური  $v_r$  სიჩქარე გარკვეული პირობების შესრულებისას იცვლის ნიშანს, ე.ი. მილის ბრუნვისას “ნამცეცის” ასრულებს რადიალურ ოსცილაციებს (ნახ. 7).



ნახ. 6.

- (a) უმასო მბრუნავ მილში მოძრავი “ნამცეცის” მოდელი [145].
- (b) ერთგვაროვანი მბრუნავი რგოლი [95].

ნახ. 7. “ნამცეცის” რადიალური  $v_r$  სიჩქარის

- (წყვეტილი წირი) და და აზიმუტალური  $v_\phi = \omega r$  სიჩქარის (უწყვეტი წირი) დროითი ევოლუცია საწყისი  $v_0$  სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის. (a)  $v_0 = 10^{-3}$ ; (b)  $v_0 = 0.3$ ; (c)  $v_0 = \sqrt{2}/2$ ; (d)  $v_0 = 0.99$ .

ნაშრომში [95] ჩვენ შევისწავლეთ ერთგვაროვანი რელატივისტურად მბრუნავი ვიწრო და თხელი რგოლის დინამიკა. ამ სიმეტრიული რელატივისტური სისტემის ლაგრანჟიანს და ჰამილტონიანს აქვს, შესაბამისად, შემდეგი სახე:

$$\mathcal{L} = -mc^2(1 - \dot{v}^2/c^2)^{1/2} = -mc^2\gamma^{-1}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p_r^2 + L^2/r^2},$$

სადაც

$$\gamma = (1 - \dot{v}^2/c^2)^{-1/2} = (1 - r^2\dot{\phi}^2/c^2 - \dot{r}^2/c^2)^{-1/2},$$

$m$  – რგოლის მასაა საკუთარ სისტემაში (რელატივისტური ინვარიანტი), ხოლო განზოგადებული იმპულსები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$(46) \quad p_\phi = L_z = |\vec{L}| \equiv L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = const = \gamma m r^2 \dot{\phi}; \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = const = \gamma m \dot{z} = 0; \quad p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \equiv p.$$

$$\mathcal{E} = \dot{\phi} L + \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{z} p_z - \mathcal{L} = const, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \gamma m c^2.$$

აქ  $\dot{f}$  აღნიშნავს  $f$  ცვლადის წარმოებულს ლაბორატორიული სისტემის დროით.

აგებული ჰამილტონიანი გვაძლევს კანონიკურ (იხ., მაგ., [139], გვ. 169-171) განტოლებებს:

$$(47) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^2 + p^2 + L^2/r^2}}; \quad \frac{dp}{dt} = \frac{cL^2r^{-3}}{\sqrt{m^2c^2 + p^2 + L^2/r^2}},$$

საიდანაც,  $L$  იმპულსის მომენტის მუდმივობის გათვალისწინებით, ვპოულობთ ფაზურ ტრაექტორიას

$$p^2 = L^2(r_0^{-2} - r^{-2}) \geq 0. \Rightarrow r \geq r_0.$$

ნაპოვნი  $p(r)$  დამოკიდებულების გამოყენებით განტოლებები (47) ადვილად ამოიხსნება:

$$(48) \quad r(t) = \sqrt{r_0^2 + (v_0 t)^2} \square \begin{cases} r_0 + v_0^2 t^2 / 2r_0, & v_0 t / r_0 \ll 1; \\ v_0 t, & v_0 t / r_0 \gg 1; \end{cases} \quad p_r = \frac{L}{r_0} \frac{(v_0 t / r_0)}{\sqrt{1 + (v_0 t / r_0)^2}};$$

$$\dot{r}(t) = v_0 (v_0 t / r_0) [1 + (v_0 t / r_0)^2]^{-1/2}, \quad \ddot{r}(t) = v_0^2 r_0^{-1} [1 + (v_0 t / r_0)^2]^{-3/2},$$

სადაც საწყისი მნიშვნელობები  $r_0$  და  $v_0$  დაკავშირებულია მოძრაობის ინტეგრალებითან:

$$r_0 = L(\mathcal{E}^2/c^2 - m^2 c^2)^{-1/2}, \quad v_0 = c \sqrt{1 - m^2 c^4 / \mathcal{E}^2}.$$

მოძრაობის ინტეგრალების გამოყენებით (46) ფორმულებიდან მივიღებთ

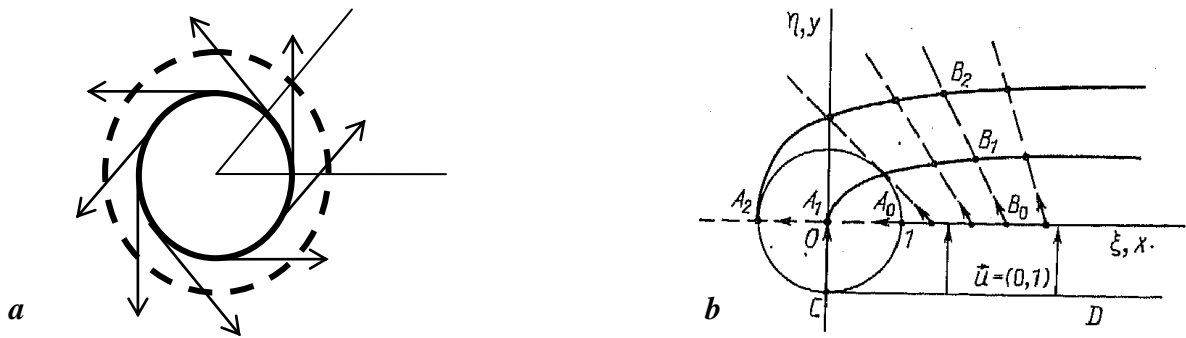
$$\dot{\phi} = \frac{L}{\mathcal{E}/c^2} r^{-2} = \frac{L}{\mathcal{E}/c^2} \frac{1}{r_0^2 + v_0^2 t^2} \Rightarrow \phi = \arctan(v_0 t / r_0) \Rightarrow t = \frac{r_0}{v_0} \tan \phi,$$

საიდანაც, (48) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით, ვპოულობთ რგოლის შემადგენელი “ნამცვეცების” ტრაექტორიებს:

$$(49) \quad r = \frac{r_0}{\cos \phi},$$

რაც წარმოადგენს  $r_0$  რადიუსის წრეწირის მხები ნახევარ-წრფეების სიმრავლეს. (48) მოძრაობის კანონიდან ვხედავთ, რომ მხებზე მოძრაობა ხდება თანაბრად  $v_0$  სიჩქარით, რაც შეესაბამება არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა შემთხვევას. ამასთან, დროის ნებისმიერ  $t \geq 0$  მომენტში “ნამცვეცები” განლაგებულია  $r$  რადიუსის წრეწირზე და სისტემა ინარჩუნებს თავდაპირველ სიმეტრიას (ნახ. 8).

**შენიშვნა 4.** ჩვენს მიერ შესწავლილი სიმეტრიული სისტემა, არსებითად, წარმოადგენს [145] შრომაში შესწავლილი “ნამცვეცების” ერთობლიობას, რომელთაგან თითოეული მოძრაობს სიბრტყეში სხვადასხვანაირად ორიენტირებულ, ერთი და იგივე კუთხური სიჩქარით მბრუნავ უმასო მილებში. ამიტომ ბუნებრივია, [95] შრომაში მიღებული შედეგები დაიყვანება [145] შედეგებზე, თუ სისტემას დავადებთ სათანადო დამატებით ბმას  $\dot{\phi} = \omega = const$ .



ნახ. 8.

[95] (a) და [30] (b) შრომებში აგებული სიჩქარეთა ველები

**შენიშვნა 5.** რელატივისტურად მბრუნავი რგოლის [95] შემადგენელი “ნამცვეცების” სიჩქარეების ჩვენს მიერ ნაპოვნი სამგანზომილებიანი (ბრტყელი) ვექტორული ველი აგებულია [30] შრომაში განხილული სპეციალური ჰიდროდინამიკური სისტემისათვის (იხ. ნახ. 8b). როგორც აღნიშნულია მონოგრაფიაში [1], არარელატივისტური მყარი სხეულის ბრუნვისა და ჰიდროდინამიკის ამოცანების მსგავსებას ღრმა მიზეზები აქვს. მით უფრო საინტერესოდ მიგვაჩნია ნაპოვნი მსგავსება რელატივისტურად მბრუნავი სისტემის და არარელატივისტური ჰიდროდინამიკური სისტემის ვექტორულ ველებს შორის. საინტერესო იქნებოდა აგრეთვე რელატივისტურად მბრუნავი სისტემის შედარება რელატივისტურ ჰიდროდინამიკურ სისტემასთან [148]-[150].

### §5.3. ბაროქრონული დინება

ნაშრომებში [27]-[30] სამგანზომილებიანი ალგებრული ინვარიანტები გამოყენებულია ჰიდრო- და აეროდინამიკის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებების სისტემის შესასწავლად და ზოგადი ამონახსნების სიმეტრიის ტიპის დასადგენად.

შრომებში [27-29] და [66a,b] ნაჩვენებია, რომ უწყვეტი გარემოს სიჩქარეთა ველის იაკობის მატრიცის და თერმოდინამიური სიდიდეების წარმოებულების მატრიცის ალგებრული ინვარიანტები აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებათა გარკვეულ სისტემას, რომელიც შესაძლებელია გაგანტეგრით სითხისა და აირის ზოგიერთი მოდელისათვის. კერძოდ, იზოტროპული წნევის იდეალური უკუმშვადი სითხის და იდეალური ბაროქრონული აირის მოძრაობის განტოლებების სრული ინტეგრებისათვის საკმარისია იაკობის მატრიცის ალგებრული ინვარიანტების ცოდნა (იხ. [66]).

**განმარტება 1.** იდეალური აირის მოძრაობას ეწოდება ბაროქრონული, თუ მისი წნევა და სიმკვრივე ამ მოძრაობის პროცესში ერთნაირია  $\mathbb{E}^3$  სივრცის ყველა წერტილში და დამოკიდებულია მხოლოდ  $t$  დროზე.

ბაროქრონული მოძრაობის იზენტროპულობის გამო აირის წნევა ცალსახად განისაზღვრება მისი სიმკვრივით. ამიტომ ბაროქრონული მოძრაობის აღმწერი დიფერენციალური განტოლებები დაიყვანება შემდეგ სისტემაზე

$$(50) \quad \partial_t u_k + u_j \partial_j u_k = 0, \quad \partial_t \rho + \rho \partial_j u_j = 0, \quad (k = \overline{1,3})$$

აირის სიჩქარის  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ვექტორის მდგენელებისა და  $\rho = \rho(t)$  სიმკვრივისათვის, სადაც  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) და, როგორც ზემოთ, მუნჯი ინდექსებით იგულისხმება აჯამვა.

შრომებში [27] და [28] შესწავლილია  $J = [\partial_k u_i] \in M_3(\mathbb{R})$  იაკობის მატრიცის ალგებრული ინვარიანტები – მისი მახასიათებელი მრავალწევრის

$$(51) \quad \det[J - E_3 \lambda] = -\lambda^3 + k_1 \lambda^2 - k_2 \lambda + k_3$$

კოეფიციენტები  $k_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) და ნაჩვენებია, რომ სამართლიანია შემდეგი

**წინადადება 1.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას იაკობის  $J = [\partial_k u_i]$  მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ  $t$  დროზე და აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილ სისტემას:

$$(52) \quad k_1' = 2k_2 - k_1^2, \quad k_2' = 3k_3 - k_1 k_2, \quad k_3' = -k_1 k_3,$$

რომლის ამონახსნებს, საწყისი პირობებით  $k_i(0) = c_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , აქვს შემდეგი სახე ( $q' = \partial_t q$  და ა.შ.):

$$(53) \quad k_1 = q' / q, \quad k_2 = q'' / 2q, \quad k_3 = q''' / 6q, \\ q(t) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

ამასთან, აირის სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით  $\rho = \rho_0 / q(t)$ , სადაც  $\rho_0 > 0$  მუდმივაა.

ამავე შრომაში ნაჩვენებია, რომ ცვლადების გარდაქმნა  $(t, \vec{x}, \vec{u}) \rightarrow (t, \vec{y}, \vec{v})$  ფორმულებით

$$(54) \quad y_i = x_i - t u_i, \quad v_i(t, \vec{y}) = u_i(t, \vec{x}) \quad (i = \overline{1,3})$$

(რომელიც ურთიერთცალსახაა, როცა  $t$  საკმარისად მცირეა), ცვლის იაკობის მატრიცას:

$$J_u = [\partial_{x_k} u_i] \rightarrow J_v = [\partial_{y_k} v_i].$$

ვინაიდან (54) გარდაქმნა არ არის ორთოგონალური,  $J_v$  და  $J_u$  მატრიცების ინვარიანტები  $k_i = k_i(u)$  და  $K_i = K_i(v)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , სხვადასხვაა. შრომებში [28] და [27] ჩამოყალიბებულია შემდეგი

**წინადადება 2.** ა) მატრიცები  $J_u$  და  $J_v$  დაკავშირებულია თანაფარდობებით:

$$(55) \quad J_u = J_v(E_3 - tJ_u), \quad J_v = (E_3 + tJ_v)J_u,$$

ანუ

$$(55') \quad (E_3 - tJ_u)(E_3 + tJ_v) = E_3.$$

ბ) თუ ფუნქციები  $u_i(t, \vec{x})$  აკმაყოფილებს ეილერის (50) განტოლებებს, (54) გარდაქმნის შედეგად გვექნება:

$$(56) \quad \partial_i v_i(t, \vec{y}) = 0. \quad (i = \overline{1,3})$$

ამ წინადადებების ორიგინალური დამტკიცება [66a,b] იხ. დამატებაში C1.

ნაშრომში [27], V.2 წინადადების საფუძველზე, აირის ბაროქრონული მოძრაობის აღსაწერად შესწავლილია ისეთი სტაციონარული ვექტორული  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{y})$  ველის პოვნის ამოცანა, რომლისთვისაც იაკობის  $J_v = [\partial_{y_k} v_i]$  მატრიცის ინვარიანტები მუდმივი სიდიდეებია. მონოგრაფიაში [152] განვითარებული მეთოდების გამოყენებით ნაპოვნია ღის მაქსიმალურად ფართო ლოკალური ჯგუფი  $G$ , რომელიც მოქმედებს  $R^9(\vec{y}, \vec{v}, \vec{c})$  9-განზომილებიან სივრცეში და წარმოადგენს ასეთ ვექტორულ ველებზე დადებული (56) პირობების სიმეტრიის ჯგუფს. ნაპოვნია (56) განტოლებების ამონახსნების ექვივალენტობის კლასები  $G$  ჯგუფის მიმართ. ნახვევებია, რომ არსებობს (56) განტოლებების ამონახსნების ოთხი კლასი, რომლებიც წყვილ-წყვილად არაექვივალენტურია  $G$  ჯგუფის მოქმედების მიმართ და შეესაბამება “კონსტანტების ვექტორის”  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$1^\circ. (0,0,0), \quad 2^\circ. (1,0,0), \quad 3^\circ. (0,1,0), \quad 4^\circ. (0,-1,0).$$

[27] შრომაში მიღებული ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ (56) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი ექვივალენტურია ისეთი ამონახსნისა, რომლისათვისაც

$$(57) \quad c_3 = \det \left[ \frac{\partial}{\partial y_k} v_j \right] = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ  $\vec{v}(\vec{y}) = (v_1, v_2, v_3)$  ვექტორის კომპონენტებს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულებები. ამ დამოკიდებულებების რაოდენობა (და, მაშასადამე,  $(v_1, v_2, v_3)$  ვექტორის დამოუკიდებელი კომპონენტების რაოდენობა) განისაზღვრება იაკობის  $[\partial_{y_k} v_j]$  მატრიცის რანგით  $r = \text{rank} [\partial_{y_k} v_j]$ . (57) პირობის თანახმად ცხადია, რომ  $r \leq 2$ .

შრომაში [27] ჩამოყალიბებულია შემდეგი

**წინადადება 3.** (56) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი (მუდმივისგან განსხვავებული) ამონახსნი ექვივალენტურია ან ორმაგი ტაღლის (რომლისთვისაც  $r=2$ ), ან მარტივი ტაღლის (რომლისთვისაც  $c_2=0, r=1$ ).

შევნიშნოთ, რომ [27] შრომაში მიღებული ეს შედეგი შეეხება სწორედ (56) განტოლებათა სისტემას. რაც შეეხება ფიზიკურ ამოცანას აირის ბაროქრონული დინების შესახებ, დისერტაციის II თავში მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ გარდა (51) მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტებისა, იაკობის  $[\partial_k u_l]$  მატრიცას გააჩნია კიდევ სამი ინვარიანტი. თანახმად II.12 თეორემისა, არასიმეტრიული  $[\partial_k u_l]$  მატრიცის აღგებრული ინვარიანტების მინიმალური სრული სისტემა შეიცავს შემდეგ 6 წევრს (შეად. ფ-ები (1)):

$$(58) \quad \text{tr} S^\lambda, \quad \lambda = \overline{1,3}; \quad \text{tr} A^2, \quad \text{tr}(SA^2), \quad \text{tr}(SAS^2A^2),$$

სადაც

$$S_{ik} = S_{ki} = \frac{1}{2}(\partial_l u_k + \partial_k u_l), \quad A_{ik} = -A_{ki} = \frac{1}{2}(\partial_l u_k - \partial_k u_l) = \frac{1}{2} e_{ikm} \text{rot}_m \vec{u}.$$

შემოკლებისათვის აღვნიშნოთ  $\text{rot } \vec{u} = 2\vec{\omega}$ . გვექნება

$$(59) \quad \partial_k u_l = S_{lk} + A_{lk} = S_{lk} + e_{lkm} (\text{rot}_m \vec{u}) / 2 = S_{lk} + e_{lkm} \omega_m$$

და (58) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები ჩაიწერება შემდეგი სახით (შეად. ფ-ბი (1)):

$$(60) \quad \text{tr} A^2 = -2\vec{\omega}^2; \quad \text{tr}(SA^2) = \langle \vec{\omega} S \vec{\omega} \rangle - \vec{\omega}^2 \text{tr} S; \quad \text{tr}(SAS^2A^2) = \det \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_k S_{k1} & \omega_k S_{k2} & \omega_k S_{k3} \\ \omega_k S_{k1}^2 & \omega_k S_{k2}^2 & \omega_k S_{k3}^2 \end{bmatrix}.$$

(56) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ბაროქრონული დინებისას

$$(61) \quad \partial_i J_v = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial v_j}{\partial t} \right] = 0.$$

(61) თანაფარდობის გათვალისწინებით (55) იგივეობებიდან ვპოულობთ:

$$(62) \quad J_v(\vec{y}) = J_u(0, \vec{x}),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (იხ. [66])

**წინადადება 4.** იაკობის  $J_u = [\partial_k u_l]$  მატრიცის დამოკიდებულებას  $t$  დროზე აქვს სახე:

$$(63) \quad J_u(t, \vec{x}) = J_u(0, \vec{x}) (E_3 + t J_u(0, \vec{x}))^{-1}$$

((55') იგივეობის თანახმად, მატრიცა  $(E_3 + t J_u(0, \vec{x}))^{-1} = (E_3 + t J_v)^{-1} = (E_3 - t J_u(t, \vec{x}))$  არსებობს). ■

(63) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს ზოგადი ხასიათის შემდეგი (იხ. [66])

**თეორემა 1.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას იაკობის მატრიცა  $J_u = [\partial_k u_l]$  ნებისმიერი ნატურალური  $l, m \in \square$  რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს თანაფარდობებს

$$(64) \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m} [J_u(t, \vec{x})]^l = (-1)^m \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)} [J_u(t, \vec{x})]^{l+m}. \quad (l, m = 1, 2, \dots)$$

დამტკიცება მარტივია ინდუქციით. ■

აღვნიშნოთ, რომ ფორმულა (64) ძალაში რჩება მაშინაც, როცა  $l = 0, -1, \dots$ . ამ შემთხვევაში მოსახერხებელია ეს ფორმულა ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$(64') \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m} [J_u(t, \vec{x})]^l = (-l)(-l-1)\dots(-l-m+1) [J_u(t, \vec{x})]^{l+m}. \\ (-l \in \square, m \in \square)$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს (იხ. [66]) რამდენიმე საინტერესო შედეგი:

**შედეგი 1.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას  $\text{tr}[J_u(t, \vec{x})]^l$  ( $l \in \square$ ) სიდიდეები  $t$  დროზე დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$(65) \quad \partial_t \text{tr}[J_u(t, \vec{x})]^l = -l \text{tr}[J_u(t, \vec{x})]^{l+1}.$$

დამტკიცება ემყარება (64) ფორმულას და  $\partial_t \equiv \partial / \partial t$  ოპერაციის წრფივობას. ■

**შედეგი 2.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას  $\text{tr}[J_u(t, \vec{x})]^l$ ,  $l \in \square$ , სიდიდეები არ არის დამოკიდებული სივრცით  $x_j$  კოორდინატებზე ( $\partial_j \equiv \partial / \partial x_j$ ):

$$(66) \quad \partial_j \text{tr}[J_u(t, \vec{x})]^l = 0. \quad (j = \overline{1,3})$$

დამტკიცება ემყარება (50) განტოლებებს და (66) ფორმულას. ■

**შედეგი 3.** (65) ფორმულის  $m$ -ჯერ გამოყენება მოგვცემს თანაფარდობას

$$(67) \quad \partial_t^m (\text{tr} J^l) = (-1)^m \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)} \text{tr} J^{l+m}, \quad l, m \in \square. \quad \blacksquare$$

ჩავწეროთ (52) განტოლებები (59) წარმოდგენის გამოყენებით. (65) ფორმულისა და ჰამილტონ-კელის თეორემის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 S_1' &= \text{tr}S' = -(\text{tr}A^2 + \text{tr}S^2) = -\text{tr}(S+A)^2, \\
 (\text{tr}A^2 + \text{tr}S^2)' &= -2(\text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2)) = -2\text{tr}(S+A)^3, \\
 (\text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2))' &= -3\text{tr}(S+A)^4 = \\
 &= -S_1^4/2 + 3S_1^2(\text{tr}A^2 + \text{tr}S^2) - 3/2(\text{tr}A^2 + \text{tr}S^2)^2 - 4S_1(\text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2)).
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

აქედან გამომდინარეობს

**წინადადება 5.** ფუნქციები  $S_1 = \text{tr}J = \text{tr}(S+A)$ ,  $\text{tr}(S+A)^2$ ,  $\text{tr}(S+A)^3$  დამოკიდებულია მხოლოდ  $t$  დროზე და სრულდება განტოლება

$$S_1''' + 4S_1S_1'' + 3(S_1')^2 + 6S_1^2S_1' + S_1^4 = 0. \quad \blacksquare$$

შეგნიშნოთ, რომ იგივე განტოლება შეიძლება მივიღოთ (52) განტოლებათა სისტემიდან (59) წარმოდგენის გამოყენებლადაც. შრომებში [27]-[29] ეს განტოლება გაანალიზებული არ არის.

ვეძებთ (69) არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი  $S_1 = Ct^{-\lambda}$  სახით. განტოლებაში შეტანა და გამარტივება გვაძლევს

$$-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)Ct^{-\lambda-3} + C^2t^{-2\lambda-2}(4\lambda(\lambda+1)+3\lambda^2) - 6\lambda C^3t^{-3\lambda-1} + C^4t^{-4\lambda} = 0.$$

$t$  ცვლადის ხარისხის მაჩვენებლების გატოლება გვაძლევს პირობებს

$$\begin{aligned}
 -\lambda-3 &= -2\lambda-2; & -\lambda-3 &= -3\lambda-1; & -\lambda-3 &= -4\lambda; \\
 -2\lambda-2 &= -3\lambda-1; & -2\lambda-2 &= -4\lambda; & & \\
 & & -3\lambda-1 &= -4\lambda. & &
 \end{aligned}$$

წრფივი განტოლებების ეს სისტემა თავსებადია და მისი ერთადერთი ამონახსნია  $\lambda=1$ . ამიტომ ვღებულობთ პირობას  $C$  კოეფიციენტისათვის:

$$-6C + 11C^2 - 6C^3 + C^4 = 0.$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარეში მდგარი მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად გვაძლევს:

$$C(C-1)(C-2)(C-3) = 0.$$

ამრიგად, მართებულია

**წინადადება 6.** (69) განტოლებას (და (68) განტოლებებსაც) აქვს ამონახსნები:

$$\begin{aligned}
 1^\circ. \quad & \text{tr}S = 0, \quad \text{tr}S^2 + \text{tr}A^2 = 0, \quad \text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2) = 0. \quad (C=0) \\
 2^\circ. \quad & \text{tr}S = t^{-1}, \quad \text{tr}S^2 + \text{tr}A^2 = t^{-2}, \quad \text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2) = t^{-3}. \quad (C=1) \\
 3^\circ. \quad & \text{tr}S = 2t^{-1}, \quad \text{tr}S^2 + \text{tr}A^2 = 2t^{-2}, \quad \text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2) = 2t^{-3}. \quad (C=2) \\
 4^\circ. \quad & \text{tr}S = 3t^{-1}, \quad \text{tr}S^2 + \text{tr}A^2 = 3t^{-2}, \quad \text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2) = 3t^{-3}. \quad (C=3)
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

(52) განტოლებების შესაბამისი ამონახსნებია

$$\begin{aligned}
 1^\circ. \quad & k_1 = k_2 = k_3 = 0; & (C=0) \\
 2^\circ. \quad & k_1 = t^{-1}, \quad k_2 = k_3 = 0; & (C=1) \\
 3^\circ. \quad & k_1 = 2t^{-1}, \quad k_2 = t^{-2}, \quad k_3 = 0; & (C=2) \\
 4^\circ. \quad & k_1 = 3t^{-1}, \quad k_2 = 3t^{-2}, \quad k_3 = t^{-3}; & (C=3)
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

ხოლო აირის სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით

$$\rho = \rho_0, \quad (C=0); \quad \rho = \rho_0 t^{-C}, \quad (C=1,2,3)$$

სადაც  $\rho_0 > 0$  მუდმივაა. ■

აღვნიშნოთ, რომ  $C=1,2,3$  შემთხვევებში გვაქვს  $\rho(t=0) = \infty$ .



ადვილი გასასინჯია, რომ (69) განტოლებას აკმაყოფილებს (53) ამონახსნიც  $\text{tr}S = q'/q$  და, (68) თანახმად, გვექნება

$$(73) \quad \text{tr}S^2 + \text{tr}A^2 = -(\text{tr}S)' = -(q'/q)' = (q'/q)^2 - q''/q, \quad \text{tr}S^3 + 3\text{tr}(SA^2) = 1/2(q'/q)''.$$

$$(q(t) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3)$$

ამონახსნები (70)-(72) მიეკუთვნება დიფერენციალური განტოლების ე.წ. განსაკუთრებული ამონახსნების კლასს (იხ., მაგ., 153], გვ. 72-85) და წარმოადგენს (53) ამონახსნების ოჯახის მოძვლებებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ (71) 1° - 4° ამონახსნები მიიღება (73) ამონახსნებიდან ზღვარში  $t \rightarrow \infty$ , შესაბამისად, იმ შემთხვევებში, როდესაც

$$1^\circ. c_1 = c_2 = c_3 = 0; \quad 2^\circ. c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = 0; \quad 3^\circ. c_1, c_2 \neq 0, c_3 = 0; \quad 4^\circ. c_1, c_2, c_3 \neq 0.$$

შევნიშნოთ, რომ (69) განტოლებას აკმაყოფილებს ამონახსნებიც, რომლებიც მიიღება (70)-(72) ამონახსნებიდან  $t \rightarrow t + t_0$  შეცვლით.

მოძრაობის განტოლებების ჩაკეტილი სისტემის მისაღებად საჭიროა შევავსოთ სისტემა (69) - გამოვსახოთ  $\text{tr}S^2, \text{tr}A^2, \text{tr}S^3, \text{tr}(SA^2)$  სიდიდეების წარმოებულები (58) ინვარიანტებით. ეს შესაძლებელია, რადგან II.12 თეორემის თანახმად, (58) ინვარიანტები შეადგენენ ბაზისს. გვაქვს:

$$\partial_t I_{\lambda\mu,\zeta\eta} = \partial_t \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) =$$

$$= \lambda(A^\zeta S^\mu A^\eta S^{\lambda-1})_{kj} \partial_t S_{jk} + \zeta(S^\mu A^\eta S^\lambda A^{\zeta-1})_{kj} \partial_t A_{jk} + \mu(A^\eta S^\lambda A^\zeta S^{\mu-1})_{kj} \partial_t S_{jk} + \eta(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^{\eta-1})_{kj} \partial_t A_{jk}.$$

(50) განტოლებების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\partial_t \begin{pmatrix} S_{jk} \\ A_{jk} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \partial_t (u_{j,k} \pm u_{k,j}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_k \partial_t u_j \pm \partial_j \partial_t u_k) = -\frac{\partial_k (u_m \partial_m u_j) \pm \partial_j (u_m \partial_m u_k)}{2} = -u_m \partial_m \begin{pmatrix} S_{jk} \\ A_{jk} \end{pmatrix} - \frac{u_{j,m} u_{m,k} \pm u_{k,m} u_{m,j}}{2}.$$

მარჯვენა მხარეში შემავალი იაკობის მატრიცების დაშლა სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ ნაწილებად და გამარტივებები გვაძლევს ფორმულას:

$$(75) \quad \partial_t \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) = -u_m \partial_m \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) - (\lambda + \eta) \text{tr}(S^{\lambda+1} A^\zeta S^\mu A^\eta) - (\mu + \zeta) \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^{\mu+1} A^\eta) -$$

$$- \lambda \text{tr}(S^{\lambda-1} A^{\zeta+2} S^\mu A^\eta) - \mu \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^{\mu-1} A^{\eta+2}) - \zeta \text{tr}(S^\lambda A^{\zeta-1} S A S^\mu A^\eta) - \eta \text{tr}(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^{\eta-1} S A).$$

აქედან კერძო შემთხვევებში ვღებულობთ:

$$\zeta = \mu = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \eta = 2\nu \geq 0:$$

$$(76) \quad \partial_t \text{tr}(S^\lambda A^{2\nu}) = -u_m \partial_m \text{tr}(S^\lambda A^{2\nu}) - (\lambda + 2\nu) \text{tr}(S^{\lambda+1} A^{2\nu}) - \lambda \text{tr}(S^{\lambda-1} A^{2\nu+2}) - 2\nu \text{tr}(S^\lambda A^{2\nu-1} S A);$$

$$\lambda = \zeta = 1, \quad \mu = \eta = 2:$$

$$(77) \quad \partial_t \text{tr}(S A S^2 A^2) = -u_m \partial_m \text{tr}(S A S^2 A^2) - 3 \text{tr}(S A S^3 A^2).$$

(77) ფორმულის გამოყვანისას გათვალისწინებულია, რომ

$$\text{tr}(S^\lambda A^{2\nu+1}) = \text{tr}(S^\lambda A^{2\nu+1})^T = -\text{tr}(A^{2\nu+1} S^\lambda) = -\text{tr}(S^\lambda A^{2\nu+1}) = 0,$$

$$\text{tr}(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu}) = \text{tr}(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu})^T = -\text{tr}(A^{2\nu} S^\lambda A S^\lambda) = -\text{tr}(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu}) = 0,$$

$$\text{tr}(S A S^2 A S A) = \text{tr}(S A S^2 A S A)^T = -\text{tr}(A S A S^2 A S) = -\text{tr}(S A S^2 A S A) = 0.$$

(76) ფორმულიდან ვპოულობთ:

$$\partial_t \text{tr}S^\lambda = -u_m \partial_m \text{tr}S^\lambda - \lambda \text{tr}S^{\lambda+1} - \lambda \text{tr}(S^{\lambda-1} A^2); \quad (\lambda = \overline{1,3})$$

$$(78) \quad \partial_t \text{tr}A^2 = -u_m \partial_m \text{tr}A^2 - 4 \text{tr}(S A^2);$$

$$\partial_t \text{tr}(S A^2) = -u_m \partial_m \text{tr}(S A^2) - 3 \text{tr}(S^2 A^2) - \text{tr}A^4 - 2 \text{tr}(S A S A).$$

უკანასკნელი ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალ ინვარიანტებს შორის გვაქვს კავშირი

$$2\text{tr}(SASA) = 4\text{tr}S\text{tr}(SA^2) - (\text{tr}^2S - \text{tr}S^2)\text{tr}A^2 - 4\text{tr}(S^2A^2)$$

(იხ. დამატება C.2). ამიტომ

$$(79) \quad \partial_i \text{tr}(SA^2) = -u_m \partial_m \text{tr}(SA^2) + \text{tr}(S^2A^2) - 4\text{tr}S\text{tr}(SA^2) + (\text{tr}^2S - \text{tr}S^2)\text{tr}A^2 - (\text{tr}A^2)^2/2.$$

შეგნიშნოთ, რომ (78<sub>3</sub>) და (79) ფორმულებში შემავალი ინვარიანტი  $\text{tr}(S^2A^2)$  დაკავშირებულია (58) ბაზისის ელემენტებთან თანაფარდობებით (შეად. ფ-ები (2)-(3))

$$(80) \quad (\text{tr}(SAS^2A^2))^2 = \det[\langle \vec{w} S^{i+k-2} \vec{w} \rangle]_{i,k=1,3}, \quad \langle \vec{w} S^{i+k-2} \vec{w} \rangle = \text{tr}(S^{i+k-2}A^2) - \text{tr}A^2 \text{tr}S^{i+k-2}/2.$$

ასევე, (76) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\partial_i \text{tr}(S^2A^2) = -u_m \partial_m \text{tr}(S^2A^2) - 4\text{tr}(S^3A^2) - 2\text{tr}(SA^4) - 2\text{tr}(S^2ASA).$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი ინვარიანტების გამოსახვა (58) ბაზისის ელემენტებით და (76), (77) ფორმულების გათვალისწინება გვაძლევს განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2S^3) &= S_1 \text{tr}(A^2S^2) - S_2 \text{tr}(A^2S) + S_3 \text{tr}A^2 = S_1 \text{tr}(A^2S^2) - (S_1^2 - \text{tr}S^2)\text{tr}(A^2S)/2 + (\text{tr}S^3 - S_1 \text{tr}S^2 + S_1 S_2)\text{tr}A^2/3 = \\ &= S_1 \text{tr}(A^2S^2) - (S_1^2 - \text{tr}S^2)\text{tr}(A^2S)/2 + (2\text{tr}S^3 - 3S_1 \text{tr}S^2 + S_1^3)\text{tr}A^2/6, \end{aligned}$$

$$\text{tr}(SA^4) = \text{tr}A^2 \text{tr}(SA^2)/2,$$

$$\text{tr}(SAS^2A) = -S_1 \text{tr}(A^2S^2) + S_1^2 \text{tr}(SA^2) + S_1 \text{tr}A^2 \text{tr}S^2/2 - \text{tr}A^2 \text{tr}S^3/6 - S_1^3 \text{tr}A^2/3 - S_1 (\text{tr}A^2)^2/10,$$

საიდანაც

$$(81) \quad \begin{aligned} \partial_i \text{tr}S &= -u_m \partial_m \text{tr}S - \text{tr}S^2 - \text{tr}A^2; & (\text{tr}S = \text{tr}(S+A) = S_1) \\ \partial_i \text{tr}S^2 &= -u_m \partial_m \text{tr}S^2 - 2\text{tr}S^3 - 2\text{tr}(SA^2); \\ \partial_i \text{tr}S^3 &= -u_m \partial_m \text{tr}S^3 - 3\text{tr}S^4 - 3\text{tr}(S^2A^2) = \\ &= -u_m \partial_m \text{tr}S^3 - S_1^4/2 - 4S_1 \text{tr}S^3 + 3(S_1^2 - \text{tr}S^2/2)\text{tr}S^2 - 3\text{tr}(S^2A^2); \\ \partial_i \text{tr}A^2 &= -u_m \partial_m \text{tr}A^2 - 4\text{tr}(SA^2); \\ \partial_i \text{tr}(SA^2) &= -u_m \partial_m \text{tr}(SA^2) + \text{tr}(S^2A^2) - 4S_1 \text{tr}(SA^2) + (S_1^2 - \text{tr}S^2)\text{tr}A^2 - (\text{tr}A^2)^2/2; \\ \partial_i \text{tr}(S^2A^2) &= \\ &= -u_m \partial_m \text{tr}(S^2A^2) - 2S_1 \text{tr}(S^2A^2) - (2\text{tr}S^2 + \text{tr}A^2)\text{tr}(SA^2) - \text{tr}S^3 \text{tr}A^2 + S_1 \text{tr}S^2 \text{tr}A^2 + S_1 (\text{tr}A^2)^2/5. \end{aligned}$$

განტოლებები (81) უნდა შევავსოთ (77) განტოლებით, რომელშიც ინვარიანტი  $\text{tr}(SAS^3A^2)$  საჭიროა გამოვსახოთ (58) ბაზისის ინვარიანტებით.

ვისარგებლოთ თანაფარდობით (შეად. ფ-ები (1))

$$\text{tr}(S^\lambda A S^\mu A S^\nu A) = A_{12} A_{23} A_{31} \det \begin{bmatrix} s_1^\lambda & s_2^\lambda & s_3^\lambda \\ s_1^\mu & s_2^\mu & s_3^\mu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & s_3^\nu \end{bmatrix},$$

რომელიც სამართლიანია  $(S_{ik} + A_{ik})$  ტენზორის კანონიკურ ბაზისში. განსახილველ შემთხვევაში გვაქვს  $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = 3$  და შედეგად ვღებულობთ (იხ., მაგ., [59], გვ. 27):

$$\text{tr}(A^2SAS^3) = \text{tr}(A^2SAS^2)\text{tr}S.$$

რადგანაც მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს დგას ინვარიანტები, ის სამართლიანია ნებისმიერ (ორთონორმირებულ) ბაზისში. ამ შედეგის (77) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ:

$$(82) \quad \partial_i \text{tr}(SAS^2A^2) = -u_m \partial_m \text{tr}(SAS^2A^2) - 3S_1 \text{tr}(SAS^2A^2).$$

ვინაიდან (იხ. წინადადება 5.1)

$$\partial_m \text{tr}S^2 + \partial_m \text{tr}A^2 = \partial_m \text{tr}(S+A)^2 = \partial_m (k_1^2 - 2k_2) = 0,$$

$$\partial_m \text{tr}S^3 + 3\partial_m \text{tr}(SA^2) = \partial_m \text{tr}(S+A)^3 = \partial_m (k_1 \text{tr}(S+A)^2 - k_2 k_1 + 3k_3) = 0,$$

ხოლო ინვარიანტები  $S_1 = \text{tr}S, \text{tr}S^2, \text{tr}S^3, \text{tr}A^2, \text{tr}(SA^2)$  ერთმანეთისგან ფუნქციონალურად

დამოუკიდებელია, გვექნება:

$$(83) \quad \partial_m S_1 = \partial_m \text{tr} S = \partial_m \text{tr} S^2 = \partial_m \text{tr} S^3 = \partial_m \text{tr} A^2 = \partial_m \text{tr}(SA^2) = 0.$$

აქედან, (81) განტოლებების გამოყენებით, მივიღებთ

$$(84) \quad \partial_m \text{tr}(S^2 A^2) = 0 \Rightarrow \partial_m \text{tr}(S^2 A S A^2) = 0.$$

ამრიგად, დამტკიცებულია [66] შემდეგი

**წინადადება 7.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას იაკობის  $[\partial_k u_i]$  მატრიცის ყველა ალგებრული ინვარიანტი დამოკიდებულია მხოლოდ  $t$  დროზე.

$[\partial_k u_i]$  მატრიცის ალგებრული ინვარიანტების (58) ბაზისის ელემენტები აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილ სისტემას ( $f' \equiv \partial_t f$ ):

$$(85) \quad \begin{aligned} (\text{tr} S)' &= -\text{tr} S^2 - \text{tr} A^2; & (\text{tr} S = \text{tr}(S + A) = S_1) \\ (\text{tr} A^2)' &= -4\text{tr}(SA^2); \\ (\text{tr} S^2)' &= -2\text{tr} S^3 - 2\text{tr}(SA^2); \\ (\text{tr} S^3)' &= -3\text{tr} S^4 - 3\text{tr}(S^2 A^2); & (\text{tr} S^4 = S_1^4/6 + 4/3 S_1 \text{tr} S^3 - (S_1^2 - \text{tr} S^2/2) \text{tr} S^2) \\ \text{tr}(SA^2)' &= \text{tr}(S^2 A^2) - 4S_1 \text{tr}(SA^2) + (S_1^2 - \text{tr} S^2) \text{tr} A^2 - (\text{tr} A^2)^2/2; \\ \text{tr}(SAS^2 A^2)' &= -3S_1 \text{tr}(SAS^2 A^2); \\ \text{tr}(S^2 A^2)' &= -2S_1 \text{tr}(S^2 A^2) - (2\text{tr} S^2 + \text{tr} A^2) \text{tr}(SA^2) - \text{tr} S^3 \text{tr} A^2 + S_1 \text{tr} S^2 \text{tr} A^2 + S_1 (\text{tr} A^2)^2/5. \end{aligned}$$

ცხადია, რომ [28] შრომაში მიღებული განტოლებები (52) გამომდინარეობს (85) სისტემიდან. აღვნიშნოთ

$$(86) \quad \gamma \equiv -\text{tr} A^2 = 2\omega^2 = (\text{rot} \vec{u})^2/2, \quad \gamma = \gamma(t) \geq 0.$$

ამ აღნიშვნის გამოყენებით განტოლებები (85<sub>1-5</sub>) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$(87) \quad \begin{aligned} \text{tr} S^2 &= \gamma - S_1'; & \text{tr}(SA^2) &= \gamma'/4; & \text{tr} S^3 &= -\text{tr}(SA^2) - (\text{tr} S^2)'/2 = -3\gamma'/4 + S_1''/2; \\ \text{tr}(S^2 A^2) &= -\text{tr} S^4 - (\text{tr} S^3)'/3 = \\ &= \gamma''/4 + S_1 \gamma' + \gamma(S_1' + S_1^2) - \gamma^2/2 - \{S_1''' + 4S_1 S_1'' + 3(S_1')^2 + 6S_1^2 S_1' + S_1^4\}/6; \\ \text{tr}(S^2 A^2) &= \gamma(S_1' + S_1^2) - \gamma^2/2 + \gamma''/4 + S_1 \gamma'. \end{aligned}$$

ორი უკანასკნელი ფორმულის შედარება გვაძლევს განტოლებას

$$(88) \quad S_1''' + 4S_1 S_1'' + 3(S_1')^2 + 6S_1^2 S_1' + S_1^4 = 0,$$

რომელიც ემთხვევა განტოლებას (70). განტოლება (85<sub>6</sub>) ადვილად ინტეგრდება:

$$(89) \quad \text{tr}(SAS^2 A^2) = C_6 \exp\left[-3 \int S_1(t) dt\right].$$

ბოლოს, (85<sub>7</sub>) განტოლებიდან გამარტივებების შედეგად ვღებულობთ:

$$(90) \quad \gamma''' + 6S_1 \gamma'' + 6\gamma'(S_1' + 2S_1^2) + 2\gamma(S_1'' + 3(S_1')^2 + 4S_1^3) - 4S_1 \gamma^2/5 = 0.$$

განტოლებები (87)-(90) შეადგენს ჩაკეტილ სისტემას, რომლის ამონახსნებიც სავსებით განსაზღვრავს იაკობის  $[\partial_k u_i]$  მატრიცის (58) ინვარიანტებს. ამ არაწრფივი, მესამე რიგის დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნის პოვნა საკმაოდ რთულია, თუმცა ადვილად შესაძლებელია, რომ ამ სისტემას აქვს რამდენიმე მარტივი კერძო ამონახსნი. ფიზიკური თვალსაზრისით განსაკუთრებით საინტერესოა პოტენციური ბაროქრონული დინების შემთხვევა, როდესაც

$$(91) \quad \gamma = -\text{tr} A^2 = (\text{rot} \vec{u})^2/2 = 0, \quad S_1(t) = \text{tr} S = \text{div} \vec{u} \in C^2.$$

ეს შემთხვევა შესწავლილია შრომაში [66], სადაც ნაჩვენებია, როგორ შეიძლება (88) და (90) არაწრფივი სისტემის ამონახსნის დაკავშირებული სირთულეების შემოვლა.

### §5.4. ბაროქრონული დინების რეჟიმები და ევოლუცია

ზოგად შემთხვევაში (87)-(90) განტოლებეთა სისტემაში შემავალი ინვარიანტების  $t$  დროზე დამოკიდებულების მოსაძებნად შესაძლებელია ვისარგებლოთ (63) ფორმულით

$$J(t, \vec{x}) = J(0, \vec{x})(E_3 + tJ(0, \vec{x}))^{-1}.$$

აქედან,  $\det(E_3 + tJ(0, \vec{x})) = q(t) = 1 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \neq 0$  უტოლობის გათვალისწინებით ( $c_1, c_2, c_3$  მუდმივების შინაარსი იგივეა, რაც ფორმულებში (53)), ვპოულობთ:

$$(92) \quad \begin{aligned} J(t, \vec{x}) &= q^{-1}(t)J(0, \vec{x})(E_3 + t \operatorname{tr} J(0, \vec{x})E_3 - tJ(0, \vec{x}) + t^2\Delta^T(0, \vec{x})) = \\ &= q^{-1}(t)\{(1 + tc_1)J(0, \vec{x}) - tJ^2(0, \vec{x}) + t^2c_3E_3\}, \end{aligned}$$

სადაც  $\Delta(0, \vec{x}) = [\Delta_{ij}(0, \vec{x})] \in M_3(\square)$  და  $\Delta_{ij}(0, \vec{x})$  არის  $i, j$  ნომრის მქონე ელემენტის ალგებრული დამატება  $J(0, \vec{x}) \in M_3(\square)$  მატრიცის დეტერმინანტში:

$$\Delta_{ij}(0, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} \det J(0, \vec{x}), \quad u_{i,j}\Delta_{ik}(0, \vec{x}) = \delta_{jk} \det J(0, \vec{x}) = \delta_{jk}c_3.$$

შესაბამისად, იაკობის  $J(t, \vec{x})$  მატრიცის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილებია

$$\begin{aligned} S_{ij}(t, \vec{x}) &= q^{-1}(t)\{(1 + tc_1)S_{ij}(0, \vec{x}) - tJ_{ij}^2(0, \vec{x}) + t^2c_3\delta_{ij}\}, \\ A_{ij}(t, \vec{x}) &= q^{-1}(t)\{(1 + tc_1)A_{ij}(0, \vec{x}) - tJ_{ij}^2(0, \vec{x})\} \end{aligned}$$

(აქ მრგვალ ფრხილებში მოთავსებული ინდექსებით ნაგულისხმევია სიმეტრიზაცია, ხოლო კვადრატულ ფრხილებში მოთავსებულებით – ანტისიმეტრიზაცია). გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ

$$(93) \quad \begin{aligned} S_{ij}(t, \vec{x}) &= q^{-1}(t)\{(1 + tc_1)S_{ij}(0, \vec{x}) - tS_{ij}^2(0, \vec{x}) - tA_{ij}^2(0, \vec{x}) + t^2c_3\delta_{ij}\}, \\ A_{ij}(t, \vec{x}) &= q^{-1}(t)\{(1 + tc_1)A_{ij}(0, \vec{x}) - tA_{ik}(0, \vec{x})S_{kj}(0, \vec{x}) - tS_{ik}(0, \vec{x})A_{kj}(0, \vec{x})\}. \end{aligned}$$

(93) ფორმულებიდან ადვილად გამოითვლება  $S_1(t)$  და  $\gamma(t)$  ინვარიანტები:

$$(94) \quad \begin{aligned} S_1(t) &= \operatorname{tr}(S_{ij}(t, \vec{x})) = q^{-1}(t)(c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2) = q'(t)/q(t), \\ \gamma(t) &= -\operatorname{tr}A^2(t, \vec{x}) = q^{-2}(t)\{b_0 + b_1t + b_2t^2\}, \end{aligned}$$

ამასთან, (94<sub>2</sub>) ფორმულაში შემავალი მუდმივები  $b_0, b_1, b_2$  გამოისახება სიჩქარის (გლუვი) ველის სივრცული წარმოებულების საწყისი მნიშვნელობებით  $u_{i,j}(0, \vec{x})$  და უნდა აკმაყოფილებდეს (87)-(90) განტოლებებს.

(94<sub>1</sub>) მნიშვნელობის შეტანა (90) განტოლებაში და გამარტივება მოგვცემს პირობას

$$q^2\gamma''' + 3(q^2)'\gamma'' + 3(q^2)''\gamma' + (q^2)'''\gamma - 4qq'\gamma^2/5 = 0,$$

რომელიც, ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად, დაიყვანება განტოლებაზე

$$(q^2\gamma)''' - 4(q^2\gamma)^2q^{-3}q'/5 = 0.$$

ამ განტოლებაში (94<sub>2</sub>) მნიშვნელობის შეტანა მოგვცემს პირობებს

$$(95_1) \quad \gamma(t) = 0 \Leftrightarrow b_0 = b_1 = b_2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{u}(t, \vec{x}) = 0$$

ან/და

$$(95_2) \quad q'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{u}(t, \vec{x}) = 0.$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 2.** გლუვი ვექტორული ველი, რომელიც აღწერს იდეალური აირის ბაროქრონული დინების სიჩქარეს, არის ან პოტენციური, ან სოლენოიდური. ■

შევისწავლოთ ეს შემთხვევები ცალცალკე [66].

1. პოტენციური ბაროქრონული დინებისას, ე.ი. როდესაც

$$\operatorname{rot} \vec{u}(t, \vec{x}) = 0, \quad \vec{u}(t, \vec{x}) = \operatorname{grad} \varphi(t, \vec{x}),$$

(85) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A^2)' = \operatorname{tr}(SA^2) = \operatorname{tr}(SA^2)' = \operatorname{tr}(S^2A^2) = \operatorname{tr}(S^2A^2)' = 0,$$

$$A_{lk} = (u_{l,k} - u_{k,l})/2 = 0, \quad u_{l,k} = S_{lk};$$

$$\operatorname{tr}(SAS^2A^2) = \operatorname{tr}(SAS^2A^2)' = 0;$$

(96)

$$\operatorname{tr} S^2 = -(\operatorname{tr} S)' = -S_1';$$

$$\operatorname{tr} S^3 = -(\operatorname{tr} S^2)' / 2 = S_1'' / 2;$$

$$(\operatorname{tr} S^3)' = -3\operatorname{tr} S^4 = -S_1^4 / 2 - 4S_1 \operatorname{tr} S^3 + 3(2S_1^2 - \operatorname{tr} S^2) \operatorname{tr} S^2 / 2 = S_1''' / 2.$$

აქედან გამომდინარეობს

**თეორემა 3.** იდეალური აირის ბაროქრონული პოტენციური დინებისას სიმეტრიული  $S = [S_{kl}] = [(u_{l,k} + u_{k,l})/2]$  მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტები

$$S_1 = \operatorname{tr} S, \quad S_2 = (S_1^2 - \operatorname{tr}(S^2))/2, \quad S_3 = \det S = (\operatorname{tr}(S^3) - S_1 \operatorname{tr}(S^2) + S_2 S_1) / 3$$

დამოკიდებულია მხოლოდ  $t$  დროზე და აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილ სისტემას (შეად. (52)):

$$(97) \quad \partial_t S_1 = 2S_2 - S_1^2, \quad \partial_t S_2 = 3S_3 - S_1 S_2, \quad \partial_t S_3 = -S_1 S_3, \quad \partial_j S_1 = \partial_j S_2 = \partial_j S_3 = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

რომელსაც, დინების პოტენციურობის გათვალისწინებით, აქვს შემდეგი სახის ამონახსნები:

$$(98) \quad S_1 = 3(t + t_0)^{-1}, \quad S_2 = 3(t + t_0)^{-2}, \quad S_3 = (t + t_0)^{-3}. \quad (t_0 \geq 0)$$

(98) ამონახსნები ცალსახად განისაზღვრება ჰიდროდინამიური განტოლებებით (50), ხოლო დინების სიჩქარის პოტენციალი  $\varphi(t, \vec{x})$  და სიჩქარე  $\vec{u}(t, \vec{x})$  გამოისახება ფორმულებით:

$$(99) \quad \varphi(t, \vec{x}) = \operatorname{const} - 3(t + t_0)^{-1} \left\{ \bar{R}^2 / 2 - \bar{x}^2 / 6 \right\}, \quad (\bar{R}^2 \geq 0)$$

$$(100) \quad \vec{u}(t, \vec{x}) = (t + t_0)^{-1} \vec{x}.$$

ამასთან, აირის სიმკვრივის დროზე დამოკიდებულება აიწერება ფორმულებით:

$$(101) \quad \rho = \rho_0 |1 + t/t_0|^{-3}, \quad \text{როცა } |t_0| = -3\rho_0 / \rho_0' > 0 \quad \text{და} \quad \rho(t) = \rho_1 t^{-3}, \quad \rho_1 > 0, \quad \text{როცა } t_0 = 0.$$

**დამტკიცება.** (97) განტოლებები (ისევე, როგორც (52)) გამომდინარეობს ჰიდროდინამიური განტოლებებიდან (50). სივრცულ კოორდინატებზე  $S_i, i = \overline{1,3}$ , ინვარიანტების დამოუკიდებლობის გამო გვექნება

$$(102) \quad \operatorname{div} \vec{u}(t, \vec{x}) = S_1(t) = f(t).$$

დინების ბაროქრონულობის გამო კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში, სივრცის ნებისმიერ წერტილში  $\vec{u}(t, \vec{x})$  სიჩქარის პოტენციალი  $\varphi(t, \vec{x})$  აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას

$$(103) \quad \Delta \varphi(t, \vec{x}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(t, \vec{x}) = f(t),$$

რომლის ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \varphi_0(t, \vec{x}) - (4\pi)^{-1} \partial_t f(t) \int_V |\vec{x} - \vec{\xi}|^{-1} d^3 \xi.$$

აქ  $V \in E^3$  არის ნებისმიერი  $R > 0$  რადიუსის სფერო ცენტრით ნებისმიერ  $O \in E^3$  წერტილში, ხოლო ფუნქცია  $\varphi_0(t, \vec{x})$  აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას  $\Delta \varphi_0(t, \vec{x}) = 0$  და იგივურად მუდმივია, როგორც ყველგან რეგულარული ჰარმონიული ფუნქცია:  $\varphi_0(t, \vec{x}) = \operatorname{const}$ .

ინტეგრალის გამოსათვლელად  $\xi$  “რადიუსით” ინტეგრების შუალედი დავშალოთ ორ შუალედად:  $\xi \in [0, R] = [0, |\vec{x}|) \cup (|\vec{x}|, R]$  და თითოეულ შუალედში ვისარგებლოთ  $(4\pi|\vec{\xi} - \vec{x}|)^{-1}$  მამრავლის სფერული ფუნქციების მწკრივად გაშლის ფორმულებით (იხ., მაგ., [100], გვ. 137):

$$\varphi(t, \vec{x}) = const - f(t) \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|^{l+1}} \int_0^{|\vec{x}|} \xi^{l+2} d\xi \int d\Omega_\xi Y_{lm}^*(\Omega_\xi) Y_{lm}(\Omega_x) + |\vec{x}|^l \int_{|\vec{x}|}^R \xi^{-l+1} d\xi \int d\Omega_\xi Y_{lm}(\Omega_\xi) Y_{lm}^*(\Omega_x) \right\}.$$

აქედან,  $Y_{lm}(\Omega)$  სფერული ფუნქციების ორთონორმირების თვისებისა და  $Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}$  მნიშვნელობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(104) \quad \varphi(t, \vec{x}) = const - f(t) \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_0^{|\vec{x}|} \xi^2 d\xi + \int_{|\vec{x}|}^R \xi d\xi \right\} = const - f(t) \left\{ \frac{\bar{R}^2}{2} - \frac{\vec{x}^2}{6} \right\},$$

საიდანაც,  $\vec{u}(t, \vec{x}) = \text{grad}\varphi(t, \vec{x})$  ფორმულის გამოყენებით, გვექნება:

$$(105) \quad \vec{u}(t, \vec{x}) = f(t) \frac{\vec{x}}{3}.$$

ამ მნიშვნელობის შეტანა ვილერის (50) განტოლებებში გვაძლევს ( $\vec{r} = \vec{x}$ ):

$$\frac{1}{3} f'(t) \vec{r} + \frac{1}{9} f^2(t) \langle \vec{r} \nabla \rangle \vec{r} = 0, \quad f(t) = -\frac{\rho'(t)}{\rho(t)},$$

და გამარტივებების შემდეგ ვღებულობთ განტოლებებს

$$f'(t) + \frac{1}{3} f^2(t) = 0, \quad f(t) = -\frac{\rho'(t)}{\rho(t)},$$

რომელთა ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახისაა:

$$S_1(t) = f(t) = 3(t+t_0)^{-1},$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 |t_0|^3}{|t_0+t|^3} = \frac{\rho_0}{|1+t/t_0|^3}, \quad (\rho_0 = \rho(0) > 0, t_0 \neq 0)$$

$$\rho(t) = \rho_1 t^{-3}. \quad (\rho_1 = \rho(1), \rho_0 = +\infty, t_0 = 0)$$

ამ მნიშვნელობების შეტანა (97), (104), (105) ფორმულებში გვაძლევს (98)-(101). ■

**შედეგი 4.** იდეალური აირის ბაროქრონული პოტენციური დინებისას იაკობის მატრიცა  $J_u = [\partial_k u_l]$  და მასთან (55), (55) თანაფარდობებით დაკავშირებული მატრიცა  $J_v = [\partial_{y_k} v_l]$ , პროპორციულია ერთეულთვანი მატრიცის.

**მართლაც,** (100) ფორმულიდან ვპოულობთ

$$\partial_k u_l = \frac{\partial_k x_l}{|t+t_0|} = \frac{\delta_{kl}}{|t+t_0|}.$$

ამ შედეგის (55) განტოლებაში შეტანა მოგვცემს:

$$(1-t|t+t_0|^{-1}) E_3 (E_3 + t J_v) = E_3, \Rightarrow J_v = (|t+t_0| - t)^{-1} E_3.$$

აქედან,  $t+t_0 > 0$  უტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$(106) \quad J_v = t_0^{-1} E_3, \quad t_0 > 0.$$

ცხადია, იგივე შედეგი გამომდინარეობს უშუალოდ (54) გარდაქმნის ფორმულებიდანაც:

$$\vec{u}(t, \vec{x}) = |t+t_0|^{-1} \vec{x} \Rightarrow \vec{y} = \vec{x} - t\vec{u} = |t+t_0|^{-1} t_0 \vec{x}, \quad \vec{v}(t, \vec{y}) = |t+t_0|^{-1} \vec{x}(t, \vec{y}) = \vec{y}/t_0, \quad \partial_{y_k} v_l(t, \vec{y}) = t_0^{-1} \delta_{kl}.$$

როცა  $t_0 = 0$ , მაშინ  $u_i = x_i/t$  და გარდაქმნა (54) იძლევა  $y_i(t) = 0$ . ამ შემთხვევაში მატრიცა  $[E_3 - t J_u]$  სინგულარულია და არც სიჩქარე  $\vec{v}(t, \vec{y})$  და არც იაკობის მატრიცა  $J_v = [\partial_{y_k} v_l]$  არ არის კორექტულად განმარტებული. ■

**შენიშვნა 6.** როგორც ვხედავთ, იდეალური აირის ბაროქრონული პოტენციური დინებისას [27]-[28] შრომებში ჩამოყალიბებული (იხ. წინადადება V.3) დებულება ირღვევა. კერძოდ, (106) მატრიცის დეტერმინანტი  $\neq 0$  და არ არის შესრულებული პირობა (57).

**შენიშვნა 7.** (98) და (53) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ *იდეალური აირის ბაროქრონული პოტენციური დინებისას*  $S_i(t), i=1,3$ , *ინვარიანტების საწყის მნიშვნელობებს შორის არსებობს თანაფარდობები*

$$(107) \quad 3S_2(0) = S_1^2(0), \quad 27S_3(0) = S_1^3(0).$$

**შენიშვნა 8.** დამტკიცებული ფორმულა (100) გვიჩვენებს, რომ *იდეალური აირის ბაროქრონული პოტენციური დინების სიჩქარე აკმაყოფილებს (ფორმალურად) ჰაბლის კანონს* (იხ., მაგ., [154], გვ. 177-198) *არარელატივისტური ფორმით*. ამასთან, (100) დამოკიდებულების ინტეგრება გვაძლევს “ბაროქრონული სამყაროს” გაფართოების კანონის ხარისხოვან (და არა ექსპონენციალურ, ინფლაციურ (იხ., [151], გვ. 197)) რეჟიმს:

$$(108) \quad \bar{x}(t) = \bar{x}_0 \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right). \quad (t_0 \neq 0)$$

2. ახლა შევისწავლოთ სოლენოიდური ბაროქრონული დინება [66]. ამ შემთხვევაში (94) ფორმულებიდან გვაქვს

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad q(t) = 1, \quad \gamma(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

და  $J_u(0, \bar{x})$  ტენზორის კანონიკურ ბაზისში (იხ. დისერტაციის II თავი), (80) თანაფარდობების  $\langle \bar{\omega} S^\mu \bar{\omega} \rangle - \bar{\omega}^2 \text{tr} S^\mu = \text{tr}(S^\mu A^2)$ ,  $\mu=0,1,\dots$ , გათვალისწინებით, (87) მოგვცემს განტოლებათა სისტემას:

$$(109) \quad \begin{aligned} \text{tr} S|_{t=0} &= s_1^0 + s_2^0 + s_3^0 = 0; & \omega^2|_{t=0} &= \gamma(0)/2 = (\omega_1^0)^2 + (\omega_2^0)^2 + (\omega_3^0)^2 = b_0/2; \\ \text{tr} S^2|_{t=0} &= (s_1^0)^2 + (s_2^0)^2 + (s_3^0)^2 = b_0; & \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle|_{t=0} &= s_1^0(\omega_1^0)^2 + s_2^0(\omega_2^0)^2 + s_3^0(\omega_3^0)^2 = b_1/4; \\ \text{tr} S^3|_{t=0} &= (s_1^0)^3 + (s_2^0)^3 + (s_3^0)^3 = -3b_1/4; & \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle|_{t=0} &= (s_1^0 \omega_1^0)^2 + (s_2^0 \omega_2^0)^2 + (s_3^0 \omega_3^0)^2 = b_2/2. \end{aligned}$$

სადაც, კანონიკური ბაზისის განმარტების თანახმად,  $s_1^0 \leq s_2^0 \leq s_3^0$ ,  $\omega_2^0 \leq 0$ ,  $\omega_3^0 \geq 0$  (სიმარტივის სათვის შემდგომში  $^0$  ნიშნაკს აღარ დავწერთ).

(89) ფორმულა  $S_1(t) = 0$  პირობის გათვალისწინებით მოგვცემს  $\text{tr}(SAS^2A^2) = C_6$  და (80) და (109) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ (შეად. ფ-ები (2) და (11)):

$$(110) \quad \begin{aligned} (\text{tr}(SAS^2A^2))^2 &= C_6^2 = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 (s_3 - s_2)(s_3 - s_1)(s_2 - s_1)]^2 = \det \left[ \langle \bar{\omega} S^{i+k-2} \bar{\omega} \rangle \right]_{i,k=1,3} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 & \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle \\ \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^3 \bar{\omega} \rangle \\ \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^3 \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^4 \bar{\omega} \rangle \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_0/2 & b_1/4 & b_2/2 \\ b_1/4 & b_2/2 & \langle \bar{\omega} S^3 \bar{\omega} \rangle \\ b_2/2 & \langle \bar{\omega} S^3 \bar{\omega} \rangle & \langle \bar{\omega} S^4 \bar{\omega} \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი სიდიდეების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (80) და (109) თანაფარდობებით და ჰამილტონ-კელის თეორემით:

$$(111) \quad \begin{aligned} \text{tr}(S^3A^2) &= -S_2 \text{tr}(SA^2) + \text{tr}A^2 \det S = \frac{1}{2} \text{tr}S^2 \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle - \frac{2}{3} \bar{\omega}^2 \text{tr}S^3, \\ \langle \bar{\omega} S^3 \bar{\omega} \rangle &= \text{tr}(S^3A^2) + \bar{\omega}^2 \text{tr}S^3 = 0; \\ \text{tr}(S^4A^2) &= -S_2 \text{tr}(S^2A^2) + \text{tr}(SA^2) \det S = \frac{1}{2} \text{tr}S^2 \left( \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle + \text{tr}S^2 \text{tr}A^2/2 \right) + \frac{1}{3} \text{tr}(SA^2) \text{tr}S^3, \\ \langle \bar{\omega} S^4 \bar{\omega} \rangle &= \text{tr}(S^4A^2) + \bar{\omega}^2 \text{tr}S^4 = \frac{1}{4} b_0 b_2 - \frac{1}{16} b_1^2 \quad \left( \text{tr}S^4 = -S_2 \text{tr}S^2 = (\text{tr}S^2)^2/2 \right). \end{aligned}$$

ამ მნიშვნელობების (110) ფორმულაში შეტანისა და გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ:

$$(112) \quad (\text{tr}(SAS^2A^2))^2 = C_6^2 = \left[ (4b_0 b_2 - b_1^2)/16 \right]^2 - (b_2/2)^3 \geq 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები [66]

$$(113) \quad s_j = p_j \sqrt{b_0/6}, \quad \omega_j^2 = r_j b_0/6, \quad j = \overline{1,3}.$$

$$(114) \quad \delta = b_1(3/2b_0)^{3/2}, \quad \alpha = 18b_2/b_0^2. \quad (b_0 \neq 0)$$

ამ აღნიშვნებში (109) განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(115) \quad \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 0; & r_1 + r_2 + r_3 &= 3; \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 6; & r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 &= 2\delta; \\ p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 &= -6\delta; & r_1 p_1^2 + r_2 p_2^2 + r_3 p_3^2 &= \alpha. \end{aligned}$$

(115<sub>1-3</sub>) სისტემა ცალსახად განსაზღვრავს  $p_j = s_j \sqrt{6/b_0}, j = \overline{1,3}$ , მნიშვნელობებს, როგორც

$$(116) \quad p^3 - 3p + 2\delta = 0$$

კუბური განტოლების ფესვებს. როგორც ცნობილია (იხ., მაგ., [151]), ამ კუბური განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$(117) \quad \delta^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq b_1^2 \leq (2b_0/3)^3.$$

(112) პირობიდან მიიღება შესაბამისი შეზღუდვები  $b_2 > 0$  მუდმივას მნიშვნელობაზე:

$$(118) \quad [(4b_0 b_2 - b_1^2)/16]^2 \geq (b_2/2)^3 \Leftrightarrow 4b_2(b_0 - \sqrt{2b_2}) \geq b_1^2 \Leftrightarrow \alpha(3 - \sqrt{\alpha}) \geq 4\delta^2.$$

უკანასკნელი უტოლობის ამოსახსნელად მოსახერხებელია აღნიშვნის შეცვლა:

$$\sqrt{\alpha} = \beta + 1, \quad \beta \geq -1.$$

მაშინ (118) მიიღებს შემდეგ სახეს:

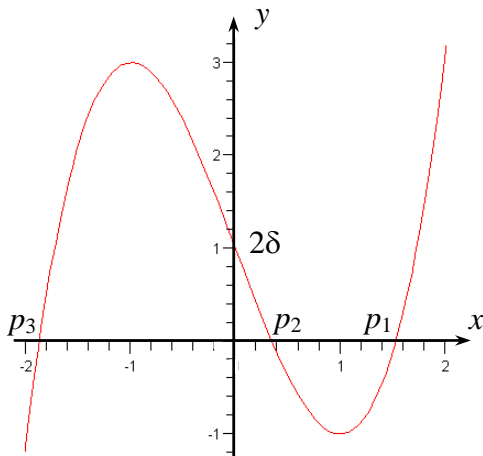
$$(119) \quad \beta^3 - 3\beta + 4\delta^2 - 2 \leq 0, \quad \beta \geq -1.$$

(116) და (119) თანაფარდობების გაანალიზება მოსახერხებელია გრაფიკულად. ავაგოთ კუბური პარაბოლა  $y = x^3 - 3x + 2\lambda$ . ნახ. 4 გვიჩვენებს (116) და (119) ფორმულებში თავისუფალი წევრების და (117) პირობის გეომეტრიულ შინაარსს (იხ., მაგ., [151]). კერძოდ, სამი ნამდვილი ფესვის არსებობის პირობა (117) შეიძლება ჩაიწეროს

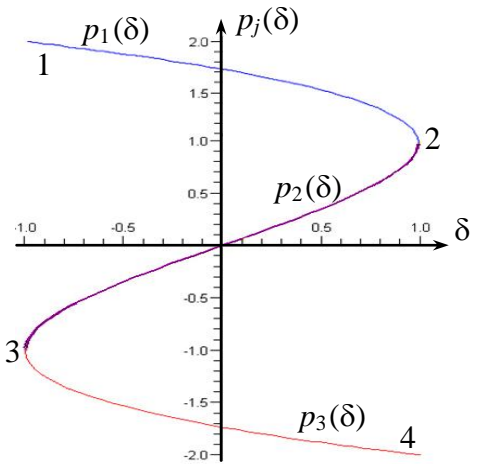
$$y_{\max} y_{\min} \leq 0$$

უტოლობის სახით (შეად. ფ-ლა (117)). გრაფიკიდან ადვილად ვპოულობთ ფესვების მიახლოებით მნიშვნელობებს, როდესაც  $|\lambda| \rightarrow 0$  და  $|\lambda| = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$ :

$$(120) \quad \begin{aligned} x_1 &\square -\sqrt{3} + \lambda/3, & x_2 &\square 2\lambda/3, & x_3 &\square \sqrt{3} - \lambda/3, & \text{როცა } \lambda &\rightarrow 0; \\ x_1 &\square -2 + 2\varepsilon/9, & x_2 &\square 1 - \sqrt{2\varepsilon/3}, & x_3 &\square 1 + \sqrt{2\varepsilon/3}, & \text{როცა } \lambda &= 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1; \\ x_1 &\square -1 - \sqrt{2\varepsilon/3}, & x_2 &\square -1 + \sqrt{2\varepsilon/3}, & x_3 &\square 2 - 2\varepsilon/9, & \text{როცა } \lambda &= -1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$



ნახ. 9



ნახ. 10

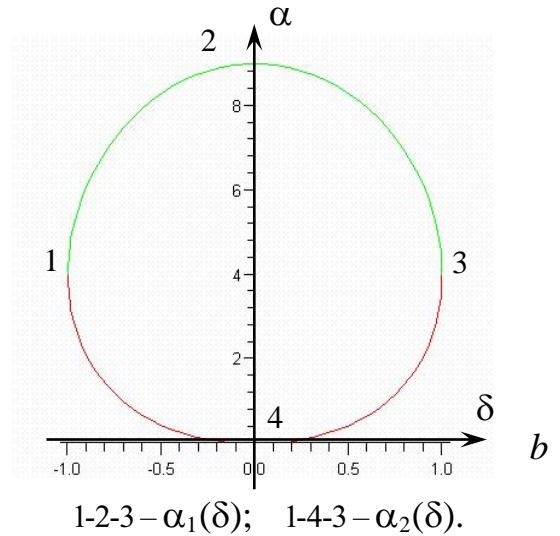
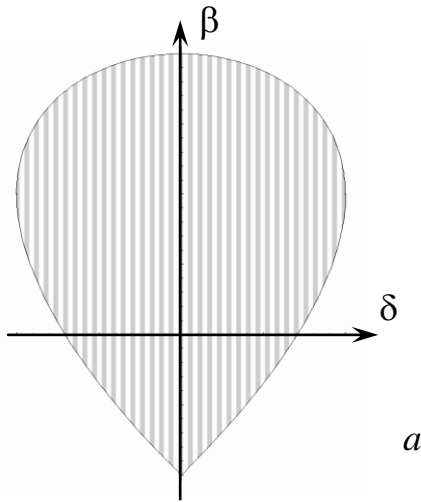
ნახ. 5 გვიჩვენებს (116) განტოლების  $p_1, p_2, p_3$  ფესვების დამოკიდებულებას  $\delta$  პარამეტრზე.



(119) უტოლობებით განსაზღვრული ინტერვალი  $[\beta_2, \beta_3]$ , რომელსაც ეკუთვნის პარამეტრი  $\beta$ , აგრეთვე დამოკიდებულია  $\delta$  პარამეტრზე. ეს დამოკიდებულება ნაჩვენებია ნახ. 6 *a*-ზე ( $\beta_2, \beta_3$  არის  $\beta^3 - 3\beta + 4\delta^2 - 2 = 0$  განტოლების ფესვები,  $-1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$ ; ასეთი ფესვების არსებობის პირობაა  $4\delta^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \delta^2 \leq 1$ ). ნახ. 6 *b*-ზე ნაჩვენებია (118) უტოლობებით განსაზღვრული შუალედი, რომელსაც ეკუთვნის პარამეტრი  $\alpha$ . კერძოდ,

(121)  $\beta \in [-1, 2], \alpha \in [0, 9], 0 \leq b_2 \leq b_0^2/2, \text{ როცა } \delta = 0,$

(122)  $\beta = 1, \alpha = 4, b_2 = 2b_0^2/9, \text{ როცა } \delta^2 = 1.$



ნახ. 11

(116) განტოლებიდან ნაპოვნი  $p_1, p_2, p_3$  ფესვების შეტანა (115<sub>4-6</sub>) აქცევს წრფივ განტოლებათა სისტემად  $r_j = 6\omega_j^2/b_0, j=1,3$ , უცნობების მიმართ, რომლის დეტერმინანტია  $\det[p_j^{k-1}]_1^3 = (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_2 - p_1)$ . ამიტომ საჭიროა შემდეგი კერძო შემთხვევების შესწავლა:

1) ვთქვათ,  $0 \leq b_1^2 = (2b_0/3)^3$ . მაშინ (116) განტოლების ფესვები ჯერადია და (111) და (112) ფორმულები გვაძლევს

(123)  $\text{tr}(SAS^2A^2) = C_6 = 0,$

ანუ

(124)  $4b_2(b_0 - \sqrt{2b_2}) = (2b_0/3)^3.$

შესაძლებელია სამი შემთხვევა (შეად. დისერტაციის II თავი):

*a)*  $s_1 = s_2 = s_3 = 0.$  *b)*  $s_1 = s_2 < 0, s_3 = -2s_1 > 0.$  *c)*  $s_1 < 0, s_2 = s_3 = -s_1/2 > 0.$

*a)* შემთხვევაში (109) სისტემიდან მივიღებთ:

$b_0 = 0, \Leftrightarrow b_1 = b_2 = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2 = s_3 = 0, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \Leftrightarrow J_u(0, \vec{x}) = J_u(t, \vec{x}) = 0.$

ამ ტრივიალურ შემთხვევაში ბაროქრონული დინების სიჩქარე მუდმივია:

$\vec{u}(t, \vec{x}) = \text{const}.$

*b)* შემთხვევაში  $J_u(0, \vec{x})$  ტენზორის მატრიცა, II.2 ლემის თანახმად, ბაზისის სათანადო შერჩევით დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$J_u(0, \vec{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & s_1 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}. \quad (s_1 < 0 < s_3, \omega_3 \geq 0)$$

ამ (კანონიკურ) ბაზისში (115) სისტემა ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$(125) \quad \begin{aligned} 2p_1 + p_3 &= 0; & r_1 + r_3 &= 3; \\ 2p_1^2 + p_3^2 &= 6; & r_1 p_1 + r_3 p_3 &= 2\delta; \\ 2p_1^3 + p_3^3 &= -6\delta; & r_1 p_1^2 + r_3 p_3^2 &= \alpha. \end{aligned}$$

აქედან ვპოულობთ (განტოლებათა სისტემა (125) თავსებადია, როცა  $b_0 \neq 0$ ,  $\delta = -1$ ,  $\alpha = 4$ ):

$$p_1 = -1, \quad p_3 = 2; \quad r_1 = 8/3, \quad r_3 = 1/3.$$

შესაბამისად, (113) ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$(126) \quad s_1 = s_2 = -(b_0/6)^{1/2} < 0, \quad s_3 = 2(b_0/6)^{1/2} > 0, \quad \omega_1^2 = 4b_0/9, \quad \omega_3^2 = b_0/18, \quad \omega_2 = 0,$$

ხოლო (114) ფორმულები გვაძლევს (109) განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობებს:

$$(127) \quad b_1 = -(2b_0/3)^{3/2} < 0, \quad b_2 = 2(b_0/3)^2 > 0.$$

(პირობა (124) გამომდინარეობს (127) ტოლობებიდან.)

*c)* შემთხვევაში  $J_u(0, \vec{x})$  ტენზორის მატრიცა კანონიკურ ბაზისში, *b)* შემთხვევის ანალოგიურად, დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$J_u(0, \vec{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & s_3 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}, \quad (s_1 < 0 < s_3, \quad \omega_3 \geq 0)$$

ხოლო (115) სისტემას ამ ბაზისში აქვს შემდეგი სახე:

$$(128) \quad \begin{aligned} p_1 + 2p_3 &= 0; & r_1 + r_3 &= 3; \\ p_1^2 + 2p_3^2 &= 6; & r_1 p_1 + r_3 p_3 &= 2\delta; \\ p_1^3 + 2p_3^3 &= -6\delta; & r_1 p_1^2 + r_3 p_3^2 &= \alpha. \end{aligned}$$

აქედან ვპოულობთ

$$p_1 = -2, \quad p_3 = 1; \quad r_1 = 1/3, \quad r_3 = 8/3,$$

ანუ

$$(129) \quad s_1 = -2(b_0/6)^{1/2} < 0, \quad s_2 = s_3 = (b_0/6)^{1/2} > 0, \quad \omega_1 = (b_0/18)^{1/2} > 0, \quad \omega_3 = 2b_0^{1/2}/3 > 0, \quad \omega_2 = 0.$$

(128) განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობებია  $\delta = +1$ ,  $\alpha = 4$ , ანუ

$$(130) \quad b_1 = (2b_0/3)^{3/2} > 0, \quad b_2 = 2(b_0/3)^2 > 0.$$

პირობა (124) ამ შემთხვევაშიც შესრულებულია.

ამრიგად, არატრივიალურ *b)* და *c)* შემთხვევებში იაკობის  $[u_{i,j}(t, \vec{x})]$  მატრიცის ყველა ალგებრული ინვარიანტი განისაზღვრება ერთადერთი ნებისმიერი  $b_0 = \text{tr} S^2(0) > 0$  მუდმივით და (58) ბაზისის ელემენტების საწყის მნიშვნელობათა შორის გვაქვს პოლინომური თანაფარდობები (სიზიგიები):

$$(131) \quad \begin{aligned} \text{tr} A^2 &= -\text{tr} S^2; & 18 \text{tr}(S^2 A^2) &= -7(\text{tr} S^2)^2; & (\text{tr} S^2)^3 &= 6(\text{tr} S^3)^2 = 54(\text{tr}(SA^2))^2; & \text{tr}(SAS^2 A^2) &= C_6 = 0. \\ (\text{tr} S^3 > 0, \text{tr}(SA^2) < 0, \text{როცა } s_1 = s_2 < 0 < s_3; & \text{tr} S^3 < 0, \text{tr}(SA^2) > 0, \text{როცა } s_1 = s_2 < 0 < s_3) \end{aligned}$$

2) ახლა ვთქვათ,  $0 \leq b_1^2 < (2b_0/3)^3$ . მაშინ

(116) განტოლების ფესვები მარტივია და II.2 ლემის თანახმად,  $J_u(0, \vec{x})$  ტენზორის მატრიცას კანონიკურ ბაზისში აქვს სახე

$$J_u(0, \vec{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & s_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}. \quad (s_1 < s_2 < s_3, \quad \omega_3 \geq 0, \quad \omega_2 \leq 0)$$

ამ შემთხვევაში (115<sub>4,6</sub>) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი  $\neq 0$  და, თანახმად [41] შრომაში

გამოყვანილი ფორმულისა (იხ., ფ-ლა (II.67)), გვაქვს

$$r_j \det \begin{bmatrix} T_3 & p_j \\ -p_j^T & 0 \end{bmatrix} = \det T_3 \quad (j = \overline{1,3})$$

(ამ ფორმულაში აჯამება განმეორებული ინდექსით არ ხდება!), სადაც მატრიცა  $T_3 \in M_3(\mathbb{R})$  განმარტებულია დისერტაციის II თავში. (110) ფორმულებთან შედარება და (80), (111), (113), (114) გათვალისწინება გვაძლევს:

$$T_3 = \left[ \sum_{i=1}^3 r_i p_i^{j+k-2} \right]_{j,k=\overline{1,3}} = \left[ (6/b_0)^{(j+k)/2} \langle \bar{w} S^{j+k-2} \bar{w} \rangle \right]_{j,k=\overline{1,3}} = \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha \\ 2\delta & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 \end{bmatrix}.$$

შედგად, (II.67) განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$(132) \quad r_j \det \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha & 1 \\ 2\delta & \alpha & 0 & p_j \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 & p_j^2 \\ -1 & -p_j & -p_j^2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha \\ 2\delta & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,3})$$

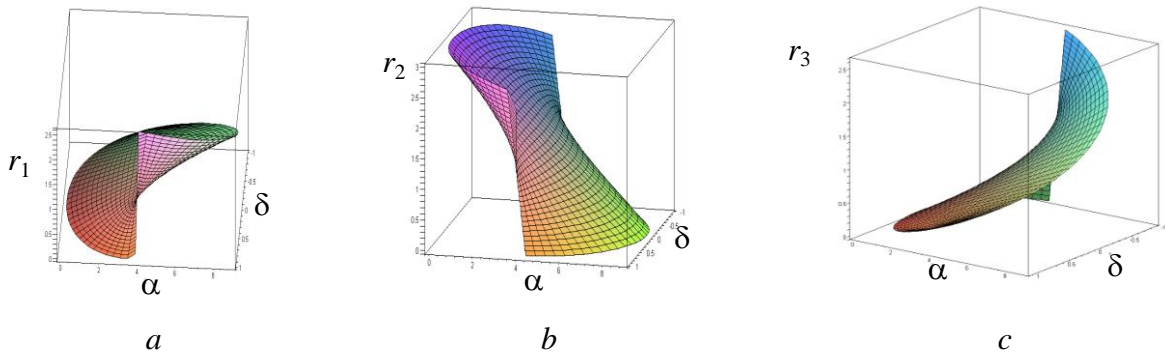
**შენიშვნა 9.** (II.67) ფორმულის გამოყვანისას არსად არ იყო გამოყენებული ის, რომ  $r_j, j=1,3$ , უცნობები ნატურალური რიცხვებია, ამიტომ ფორმულა (132) იძლევა (115<sub>4-6</sub>) განტოლებების ამონახსნს ზოგად შემთხვევაშიც, თუ  $(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_2 - p_1) \neq 0$ .

როგორც უკვე აღვნიშნეთ,  $p_1, p_2, p_3$  სიდიდეების მნიშვნელობები და  $\alpha$  პარამეტრის დასაშვებ მნიშვნელობათა არის საზღვრები განისაზღვრება  $\delta$  პარამეტრის მნიშვნელობებით. შედეგად, ფორმულა (132) განსაზღვრავს  $r_j, j=1,3$ , სიდიდეების დამოკიდებულებას  $\delta$  პარამეტრზე. ნახ. 7  $a, b, c$  გვიჩვენებს ამ დამოკიდებულებას, როცა, შესაბამისად,  $j=1, 2, 3$ . კერძოდ, (132) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r_1 r_2 r_3 = 0 \Leftrightarrow (3\alpha - 4\delta^2)^2 = \alpha^3,$$

ანუ, (112)-(114) აღნიშვნების გათვალისწინებით,

$$(133) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0 \Leftrightarrow (\text{tr}(SAS^2A^2))^2 = 0.$$



ნახ. 12

აღვნიშნეთ, რომ იმპლიკაცია (133) სამართლიანია არა მხოლოდ სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისათვის, არამედ ზოგად შემთხვევაშიც. მართებულია

**წინადადება 8.**  $S, A: E^3 \rightarrow E^3$  ოპერატორების  $\{S, A | S^T = S, A^T = -A\}$  წყვილის კანონიკურ ბაზისში მართებულია ფორმულა:

$$(134) \quad A_{12} A_{23} A_{31} = \text{tr}(SAS^2A^2) \det^{-1/2} \left[ \text{tr}(S^{j+k-2}) \right]_{j,k=\overline{1,3}}. \quad (S = S^T, s_1 < s_2 < s_3, A = -A^T)$$

დამტკიცება ემყარება (110) ფორმულებისა და II.18 წინადადების გამოყენებას. ■

ფორმულა (132) მარტივდება, როდესაც  $\delta=0 \Leftrightarrow b_1=0$ . ამ შემთხვევაში (116) განტოლებიდან ვპოულობთ  $p_1=-p_3=-\sqrt{3}$ ,  $p_2=0$  და (132) ფორმულა გვაძლევს

$$r_1=r_3=\alpha/6, \quad r_2=3-\alpha/3 \Leftrightarrow$$

$$s_1=-s_3=-(b_0/2)^{1/2}, \quad s_2=0, \quad \omega_1^2=\omega_3^2=b_2/2b_0, \quad \omega_2^2=(b_0^2-2b_2)/2b_0$$

$$(0 \leq b_2 \leq b_0^2/2, \quad b_1=0)$$

(ცხადია, იგივე შედეგს გვაძლევს უშუალოდ (115) ან (109) სისტემის ამოხსნა  $\delta=0 \Leftrightarrow b_1=0$  პირობის გათვალისწინებით). ნაპოვნ ამონახსნებს შეესაბამება შემდეგი სიზიგიები (58) ბაზისის ელემენტების საწყის მნიშვნელობათა შორის:

$$(135) \quad \text{tr}S=\text{tr}S^3=\text{tr}(SA^2)=0; \quad \text{tr}S^2=-\text{tr}A^2; \quad (4\text{tr}(SAS^2A^2))^2 = (-4\text{tr}(S^2A^2) - (\text{tr}S^2)^2)((\text{tr}S^2)^2 + 2\text{tr}(S^2A^2))^2.$$

$$(0 \leq b_2 \leq b_0^2/2, \quad b_1=0)$$

სოლენოიდური ბაროქრონული დინების ზოგად შემთხვევაში სიზიგიები საწყის მნიშვნელობათა შორის განისაზღვრება (112) თანაფარდობებით:

$$(136) \quad (4\text{tr}(SAS^2A^2))^2 = \left[ \text{tr}S^2(2\text{tr}(S^2A^2) - \text{tr}A^2\text{tr}S^2) - (2\text{tr}(SA^2))^2 \right]^2 - 2(2\text{tr}(S^2A^2) - \text{tr}A^2\text{tr}S^2)^3;$$

$$\text{tr}S^2=-\text{tr}A^2; \quad \text{tr}S^3=-3\text{tr}(SA^2). \quad (\text{tr}S=0;)$$

(115<sub>4-6</sub>) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის აღწერილი ხერხი (იხ. ფ-ლა (132) და ნახ. 7) შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ამოცანებისათვისაც, მაგალითად, ასიმეტრიული ბზრიადსათვის კუთხური სიჩქარის  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  მდგენელების მოსაძებნად (იხ. ფ-ები (18)) ინერციის  $I_1, I_2, I_3$  მომენტების, ინერციის ტენზორის ინვარიანტების, კუთხური სიჩქარის ვექტორის კვადრატის, ბრუნვის კინეტიკური ენერჯისა და იმპულსის მომენტის კვადრატის რაციონალური ფუნქციების სახით. შესაბამისი განტოლებები (შეად. (1)-(3)) განსხვავდება (115<sub>4-6</sub>) განტოლებებისგან მხოლოდ იმით, რომ ინერციის მომენტები მკაცრად დადებითია,  $0 < I_1 < I_2 < I_3$ , ხოლო (115<sub>4-6</sub>) სისტემაში  $p_1 < p_2 < p_3$  კოეფიციენტების ნიშნები შეიძლება იყოს ნებისმიერი (სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისას  $p_1 < 0, p_3 > 0, p_2 \cdot \delta > 0$ ).

**თეორემა 4.** სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისას იაკობის  $J=[u_{i,j}(t, \vec{x})]$  მატრიცის მახასიათებელი (51) განტოლების სამივე კოეფიციენტი ნულის ტოლია:

$$(137) \quad k_1(t) = k_2(t) = k_3(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad r = \text{rank}[u_{i,j}(t, \vec{x})]_{i,j=1,3} \leq 2. \quad (S_1 = \text{div} \vec{u} = u_{j,j} = 0)$$

ამასთან, შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

- 1°.  $r=0 \Leftrightarrow \text{tr}S^2=-\text{tr}A^2=0;$
- 2°.  $r=1 \Leftrightarrow \text{tr}S^2=-\text{tr}A^2 > 0, \quad \text{tr}S^3=\text{tr}(SA^2)=0$

(მაშინ, ცხადია,  $\text{tr}(S^2A^2) = -(\text{tr}S^2)^2/2 < 0, \quad \text{tr}(SAS^2A^2)=0$ );

- 3°.  $r=2$  ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.

წინასწარ დავამტკიცოთ [66] შემდეგი

**ლემა.** სოლენოიდური დინებისას  $J(t, \vec{x})$  და  $J(0, \vec{x})$  მატრიცების რანგები ტოლია:

$$(138) \quad \text{rank} J(t, \vec{x}) = \text{rank} J(0, \vec{x}).$$

**ლემის დამტკიცება.** სოლენოიდური დინების შემთხვევაში  $c_1=c_2=c_3=0$  და, (93) თანაფარდობის გათვალისწინებით,

$$(139) \quad J(t, \vec{x}) = J(0, \vec{x}) - tJ^2(0, \vec{x}) = J(0, \vec{x})[E - tJ(0, \vec{x})].$$

რადგანაც სოლენოიდური დინებისას მატრიცა  $[E - tJ(0, \vec{x})]$  არ არის გადაგვარებული,

$$\det[E - tJ(0, \vec{x})] = 1 - c_1t + c_2t^2 - c_3t^3 = 1 \neq 0,$$

ბინე-კოშის ფორმულის გათვალისწინებით, (139) ფორმულიდან ვღებულობთ (138). ■

**თეორემის დამტკიცება.** სოლენოიდური დინებისას (139) ფორმულიდან, (136) სიზიგიების გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$k_1(t) = \text{tr}J(t, \bar{x}) = \text{tr}J(0, \bar{x}) - t \text{tr}J^2(0, \bar{x}) = -t(\text{tr}S^2(0, \bar{x}) + \text{tr}A^2(0, \bar{x})) = 0,$$

$$k_3(t) = \det J(t, \bar{x}) = \det J(0, \bar{x}) \det[E - tJ(0, \bar{x})] = 0.$$

$k_2(t)$  გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ნიუტონის ფორმულით (იხ., მაგ., [42], გვ. 97)

$$2k_2(t) = (\text{tr}^2 J(t, \bar{x}) - \text{tr}J^2(t, \bar{x})) = -\text{tr}(J(0, \bar{x}) - tJ^2(0, \bar{x}))^2 = -\text{tr}(J^2(0, \bar{x}) - 2tJ^3(0, \bar{x}) + t^2J^4(0, \bar{x})).$$

მაგრამ, ჰამილტონ-კელის თეორემის თანახმად, სოლენოიდური დინებისათვის გვაქვს

$$J^l(0, \bar{x}) = c_1 J^{l-1}(0, \bar{x}) - c_2 J^{l-2}(0, \bar{x}) + c_3 J^{l-3}(0, \bar{x}) = 0, \quad l \geq 3.$$

ამიტომ  $k_2(t) = -\text{tr}J^2(0, \bar{x})/2 = 0$  და (137) დამტკიცებულია.

ღემის თანახმად, იაკობის მატრიცის რანგის გამოთვლა საკმარისია დროის საწყისი მომენტისათვის. კანონიკურ ბაზისში, (109) განტოლებათა სისტემის თანახმად, გვაქვს

$$b_0 = 0 \Rightarrow J(0, \bar{x}) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

პირიქით, თუ  $r = 0$ , მაშინ ცხადია, რომ  $J(0, \bar{x}) = 0$ , ე. ი. შემთხვევა  $1^\circ$  დამტკიცებულია.

ვთქვათ,  $b_0 = \text{tr}S^2 = -\text{tr}A^2 > 0$ . მაშინ  $1 \leq r \leq 2$ . თუ  $r = 1$ , მაშინ  $J(0)$  მატრიცის სამივე მთავარი მინორი  $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = 0$ . ეს შეუძლებელია, თუ (116) განტოლების რომელიმე ფესვი ჯერადია. მართლაც,  $s_1 = s_2 = -2s_3 > 0 \Rightarrow \Delta_{33} = s_1 s_2 + \omega_3^2 > 0$  და  $2s_1 = -s_2 = -s_3 < 0 \Rightarrow \Delta_{11} = s_2 s_3 + \omega_1^2 > 0$ . ამიტომ (იხ. ფ-ლა (117) და ნახ. 4) გვაქვს  $r = 1 \Rightarrow s_1 < s_2 < s_3 \Rightarrow 0 \leq b_1^2 < (2b_0/3)^3$ . მაგრამ თუ  $b_1 > 0$ , გვექნება ერთნაირი ნიშნის მქონე ორი საკუთარი რიცხვი და ისევე - ან  $\Delta_{33} > 0$ , ან  $\Delta_{11} > 0$ . რჩება ერთადერთი შესაძლებლობა (იხ. ნახ. 4 და ფ-ლა (132)):

$$r = 1 \Rightarrow 0 = b_1^2 < (2b_0/3)^3 \Leftrightarrow s_2 = 0, s_1 = -s_3 = -(b_0/2)^{1/2} < 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2^2 = b_0/2 = s_1^2 = s_3^2.$$

აქედან, (109<sub>3</sub>) (109<sub>5</sub>), (109<sub>6</sub>) და (111) თანახმად,

$$\text{tr}S^3 = \text{tr}(SA^2) = 0, \quad \langle \vec{\omega}, S^2 \vec{\omega} \rangle = 0 = b_2/2 \Leftrightarrow \text{tr}(S^2 A^2) = -(\text{tr}S^2)^2/2 = -b_0^2/2 < 0, \quad \text{tr}(SAS^2 A^2) = 0.$$

პირიქით, თუ  $b_1 = b_2 = 0, b_0 > 0$ , (109) (ან (115)) სისტემიდან და (116) განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$s_1 = -s_3 = -(b_0/2)^{1/2}, \quad s_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = -b_0/2 \Rightarrow$$

$$J(0) = \sqrt{b_0/2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r = \text{rank} J(0) = 1.$$

აქედან (ან (109)-(111) ფ-ებიდან) ვღებულობთ

$$\text{tr}(S^2 A^2) = -(\text{tr}S^2)^2/2 = -b_0^2/2 < 0, \quad \text{tr}(SAS^2 A^2) = 0.$$

ღემის ძალით, იგივე სამართლიანია  $J(t, \bar{x})$  მატრიცისათვისაც. ■

დამტკიცებული V.4 თეორემიდან გამომდინარეობს რამდენიმე შედეგი [66]:

**შედეგი 5.** სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისას მატრიცა  $J = [u_{j,k}(t, \bar{x})]$  დამოკიდებულია მხოლოდ დროზე და ნამდვილი ორთოგონალური გარდაქმნის სიზუსტით ურთიერთ-ცალსახად განისაზღვრება  $J(0, \bar{x})$  მატრიცის საწყისი მნიშვნელობის სამი დამოუკიდებელი ინვარიანტით, რომლებიც არ არის დამოკიდებული სივრცით კოორდინატებზე,

$$\text{tr}S^2 = -\text{tr}A^2, \quad 3\text{tr}(SA^2) = -\text{tr}S^3, \quad \text{tr}(SAS^2 A^2),$$

ამასთან, სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისას (58) ბაზისის ინვარიანტები და  $\text{tr}(S^2 A^2)$  დაკავშირებულია სიზიგიით (136) და არაპოლანომური ბმებით (უტოლობებით) (117):

$$(4\text{tr}(SAS^2 A^2))^2 = \left[ \text{tr}S^2(2\text{tr}(S^2 A^2) - \text{tr}A^2 \text{tr}S^2) - (2\text{tr}(SA^2))^2 \right]^2 - 2(2\text{tr}(S^2 A^2) - \text{tr}A^2 \text{tr}S^2)^3;$$

$$0 \leq 6(\text{tr}S^3)^2 = 54(\text{tr}(SA^2))^2 \leq (\text{tr}S^2)^3 = -(\text{tr}A^2)^3. \quad (\text{tr}S = 0) \quad \blacksquare$$

**შედეგი 6.** იდეალური აირის ბაროქრონული სოლენოიდური დინებისას ჰიდროდინამიური სიჩქარე  $u_j(t, \vec{x})$ , ( $j=1,3$ ), აიწერება ფორმულებით

$$(140) \quad u_j(t, \vec{x}) = (J_{jk}(0) - tJ^2_{jk}(0))(x_k - u_k^0 t) + u_j^0, \quad (j=\overline{1,3})$$

სადაც  $J_{jk}(0)$  არის იაკობის  $[u_{j,k}(t, \vec{x})]_{j,k=\overline{1,3}}$  მატრიცა დროის საწყის მომენტში კოორდინატთა სათავეში (რომელიც, დინების ბაროქრონულობის პირობის თანახმად, ნებისმიერად შეიძლება იქნას არჩეული) და  $u_j^0 = u_j(0, \vec{0})$ .

**დამტკიცება.** (54) და (55) ფორმულების თანახმად,

$$J_u(0, \vec{x}) = J_v(\vec{y}) = [\partial_{y_k} v_j(\vec{y})].$$

რადგანაც  $J_v(\vec{y}) = J_u(0, \vec{x})$  ტენზორის კანონიკურ ბაზისში  $v_{j,k}(\vec{y})$  კომპონენტები  $s_j, \omega_j, j=\overline{1,3}$ , განისაზღვრება  $J_u(0, \vec{x})$  ტენზორის ინვარიანტებით და, V.7 წინადადების თანახმად, არ არის დამოკიდებული  $\vec{y}$  კოორდინატებზე, ვპოულობთ (კანონიკურ ბაზისში  $S_{jk}$  დიაგონალურია!):

$$(141) \quad v_j(\vec{y}) = S_{jk} y_k - e_{jkl} \omega_k y_l + C_j = S_{jk} y_k + A_{jk} y_k + C_j = J_{jk}(\vec{y}) y_k + C_j. \quad (j=\overline{1,3})$$

ამ ფორმულაში (54) გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას  $u_j(t, \vec{x})$  უცნობების მიმართ:

$$(142) \quad u_j(t, \vec{x}) = J_{jk}(0, \vec{x})(x_k - tu_k(t, \vec{x})) + C_j. \quad (j=\overline{1,3})$$

(142) სისტემიდან ვპოულობთ

$$C_j = u_j(0, \vec{0}) = u_j^0 \quad (j=\overline{1,3})$$

და, (55') და (55) თანაფარდობების გათვალისწინებით,

$$(143) \quad u_j(t, \vec{x}) = (E_3 + tJ(0, \vec{x}))^{-1}_{jl} (J_{lk}(0, \vec{x}) x_k + u_l^0) = \\ = (E_3 - tJ(t, \vec{x}))_{jl} J_{lk}(0, \vec{x}) x_k + (E_3 - tJ(t, \vec{x}))_{jl} u_l^0 = J_{jk}(t, \vec{x})(x_k - tu_k^0) + u_j^0. \quad (j=\overline{1,3})$$

(92) ფორმულისა და V.4 თეორემის თანახმად, სოლენოიდური დინებისას გვაქვს

$$(144) \quad J(t, \vec{x}) = J(0, \vec{x}) - tJ^2(0, \vec{x}).$$

(144) ფორმულის (143) გამოსახულებაში შეტანით მივიღებთ (140) ფორმულას. ■

**შენიშვნა 10.** ფორმულა (140) შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული ფორმით, თუ განვმარტავთ ოპერატორს  $\mathbf{J}: E^3 \rightarrow E^3$  რომლის მატრიცა ორთონორმირებულ  $\{\vec{e}_k | \vec{e}_k \in E^3, k=\overline{1,3}\}$  ბაზისში ემთხვევა იაკობის მატრიცას  $t=0$  მომენტში,

$$\langle \vec{e}_j | \mathbf{J} | \vec{e}_k \rangle = J_{jk}(0, \vec{x}) = u_{j,k}(0, \vec{x}). \quad (j, k=\overline{1,3})$$

გვექნება:

$$(140') \quad \vec{u}(t, \vec{x}) = (\mathbf{J} - t\mathbf{J}^2)(\vec{x} - \vec{u}^0 t) + \vec{u}^0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (140') ფორმულით განსაზღვრული ველი  $\vec{u}(t, \vec{x})$  აკმაყოფილებს ეილერის (50) განტოლებებს ნებისმიერი  $u_j^0 = u_j(0, \vec{0})$  ( $j=\overline{1,3}$ ) მნიშვნელობებისათვის და,  $u_{k,k}(t, \vec{x}) = \text{tr} J = 0$  პირობის თანახმად, აირის სიმკვრივე და წნევა მუდმივი რჩება:

$$(145) \quad \rho'(t) = 0, \quad \rho(t) = \rho_0 > 0.$$

**განმარტება 2.** იდეალური აირის დინებას ეწოდება (იხ., მაგ., [27]) იზობარული, თუ მისი წნევა და სიმკვრივე ამ მოძრაობის პროცესში იგივერად მუდმივია, ანუ ერთნაირია სივრცის ყველა წერტილში და არ არის დამოკიდებული დროზე.

ამრიგად, მართებულია

**წინადადება 9.** იდეალური აირის სოლენოიდური ბაროქრონული დინება იზობარულია. ■

**შენიშვნა 11.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინების  $\vec{u}(t, \vec{r})$  სიჩქარის არატრივიალური დამოკიდებულება სივრცით და დროით კოორდინატებზე, წნევის გრადიენტის ნულოვანი მნიშვნელობის პირობებში, განპირობებულია სიჩქარის ველის საწყისი განაწილებით, რაც ცხადად აიწერება ფორმულებით

$$\vec{u}(0, \vec{x}) = \vec{x}/t_0, \text{ როცა დინება პოტენციურია } (\text{rot} \vec{u}(t, \vec{x}) = 0, t_0 \neq 0),$$

$$\vec{u}(0, \vec{x}) = \mathbf{J} \vec{x} + \vec{u}(0, \vec{0}), \text{ როცა დინება სოლენოიდურია } (\text{div} \vec{u}(t, \vec{x}) = 0).$$

აქ  $\mathbf{J}: E^3 \rightarrow E^3$  ოპერატორის მატრიცა (ორთოგონალური გარდაქმნის სიზუსტით) განსაზღვრულია მისი კანონიკური ფორმით და V.4 თეორემის პირობებით. ამ პირობებში ეილერის ჰიდროდინამიურ განტოლებებს (50) გააჩნია არასტაციონარული ამონახსნები, რომლებიც განისაზღვრება ჰიდროდინამიური სიჩქარის და მისი სივრცული კერძო წარმოებულების (ანუ იაკობის მატრიცის) საწყისი მნიშვნელობებით. ამასთან, სამართლიანია (იხ. [66])

**წინადადება 10.** იდეალური აირის ბაროქრონული დინებისას ეილერის ჰიდროდინამიური განტოლებების (50) სისტემის ზოგადი ამონახსნი  $\vec{u}(t, \vec{x})$  ცალსახად (ორთოგონალური გარდაქმნის სიზუსტით) განისაზღვრება არაუმეტეს ექვსი მუდმივი პარამეტრით. აგებულ ამონახსნებში განუზღვრელი მუდმივების რაოდენობა, საზოგადოდ, არ შეიძლება შემცირდეს.

**დამტკიცება.** იაკობის მატრიცის (58) ინვარიანტები გვაძლევს დინების რეჟიმის დადგენის შესაძლებლობას: დინება პოტენციურია როცა  $\text{tr} A^2 = (\text{rot} \vec{u})^2 = 0$ ; მაშინ (58) ინვარიანტებს შორის დამოუკიდებელია მხოლოდ ერთი,  $S_1 = \text{tr} S$ , რომლის საწყისი მნიშვნელობა  $S_1(0) = 3t_0^{-1}$  განსაზღვრავს დანარჩენი ინვარიანტების საწყის მნიშვნელობებს (იხ. ფ-ბი (107)), მათ დამოკიდებულებას დროზე (იხ. ფ-ები (98)) და ჰიდროდინამიკურ  $\vec{u}(t, \vec{x})$  სიჩქარეს (იხ. ფ-ები (100)).

დინება სოლენოიდურია, როცა  $\text{tr} S = \text{div} \vec{u} = 0$ ; მაშინ (58) ინვარიანტების საწყის მნიშვნელობათა შორის დამოუკიდებელია არაუმეტეს სამისა (იხ. ფ-ები (131), (135), (136)):

$$\text{tr} S^2 = -\text{tr} A^2 = b_0,$$

$$\text{tr}(SA^2) = -\text{tr} S^3 / 3 = b_1 / 4,$$

$$\text{tr}(SAS^2A^2) = \{[(4b_0b_2 - b_1^2)/16]^2 - (b_2/2)^3\}^{1/2}.$$

ინვარიანტების მნიშვნელობები, თანახმად II.3 თეორემისა, ცალსახად განსაზღვრავს ოპერატორის მატრიცას კანონიკურ ბაზისში. შედეგად, სიჩქარის საწყისი მნიშვნელობების  $u_j^0 = u_j(0, \vec{0})$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) გამოყენებით (140) ფორმულით ვპოულობთ  $\vec{u}(t, \vec{x})$  სიჩქარეს. ექვსი ნამდვილი მუდმივი რიცხვი  $b_0, b_1, b_2, u_1^0, u_2^0, u_3^0$ , საზოგადოდ, დამოუკიდებელია, ე.ი. ზოგად შემთხვევაში მათი რაოდენობა არ შეიძლება შემცირდეს. ■

**შენიშვნა 12.** სოლენოიდური ბაროქრონული დინებისათვის ფორმულა (57) სამართლიანია. ამრიგად, თეორემა V.4 აზუსტებს [27] შრომაში ჩამოყალიბებულ V.3 წინადადებას, გვაძლევს რა მარტივი ტალღის არსებობის პირობას,  $r = \text{rank} J = 1$  იაკობის მატრიცის ინვარიანტების ტერმინებში; ამასთან, საკმარისია შემოწმდეს მხოლოდ ორი პირობა:

$$\text{tr} S^3 = 0, \quad \text{tr}(SA^2) = 0.$$

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში ამოწერილია იაკობის მატრიცის დამახასიათებელი ინვარიანტები ბაროქრონული დინების სხვადასხვა რეჟიმებისათვის და თანაფარდობები ამ ინვარიანტებს შორის.

ცხრილი 1

ბაროქრონული დინების სიჩქარის, აირის სიმკვრივის, იაკობის მატრიცის ელემენტების და ინვარიანტების დროზე დამოკიდებულების ხასიათი დინების ორივე რეჟიმში

| რეჟიმი<br>ფიზ.სიდიდე                        | პოტენციური, $\text{rot } \vec{u}=0$<br>( $t_0 \geq 0$ )   | სოლენოიდური, $\text{div } \vec{u}=0$<br>( $b_0, b_2 \geq 0$ )                     |
|---|---|---|
| $S_1 = k_1 = \text{tr}S = u_{j,j}$          | $3 t+t_0 ^{-1}$   | 0   |
| $\text{tr}A^2 = -(\text{rot } \vec{u})^2/2$ | 0   | $-\gamma(t) = -(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)$   |
| $\text{tr}S^2$                              | $3 t+t_0 ^{-2}$   | $\gamma(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$   |
| $\text{tr}SA^2$                             | 0   | $\gamma'(t)/4 = b_1/4 + b_2 t/2$  |
| $\text{tr}S^3$                              | $3 t+t_0 ^{-3}$   | $-3\gamma'(t)/4 = -3b_1/4 - 3b_2 t/2$   |
| $\text{tr}(AS^2A^2S)$                       | 0   | $C_6 = \left\{ \left[ (4b_0 b_2 - b_1^2)/16 \right]^2 - (b_2/2)^3 \right\}^{1/2}$ |
| $\text{tr}(S^2A^2)$                         | 0   | $-\gamma^2(t)/2 + b_2/2 = -(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)^2/2 + b_2/2$                   |
| $J_u(t, \vec{x}) = [u_{i,j}(t, \vec{x})]$   | $ t+t_0 ^{-1} E_3 (J_v = t_0^{-1} E_3, t_0 > 0)$  | $J(0, \vec{0}) - tJ^2(0, \vec{0})$ .  |
| $S(t, \vec{x}) = [u_{(i,j)}(t, \vec{x})]$   | $ t+t_0 ^{-1} E_3$  | $S(0) - t(S^2(0) + A^2(0))$ .   |
| $A(t, \vec{x}) = [u_{[i,j]}(t, \vec{x})]$   | 0   | $A - t(SA + AS)$ .  |
| $k_2$                                       | $3 t+t_0 ^{-2} = S_2$   | 0   |
| $k_3$                                       | $ t+t_0 ^{-3} = S_3$  | 0   |
| $S_2$                                       | $3 t+t_0 ^{-2}$   | $-b_0/2$  |
| $S_3$                                       | $ t+t_0 ^{-3}$  | $-b_1/4$  |
| $u_j(t, \vec{x}), \quad j = \overline{1,3}$ | $x_k  t+t_0 ^{-1}$  | $u_j(t, \vec{x}) = (J_{jk}(0) - tJ_{jk}^2(0))(x_k - u_k^0 t) + u_j^0$             |
| $\rho(t)$                                   | $\rho_0  1+t/t_0 ^{-3} \quad (t_0 \neq 0)$<br>$\rho_1 t^{-3} \quad (\rho_0 = +\infty, t_0 = 0)$ | $\rho_0 = \text{const} > 0$   |

ცხრილი 2

იაკობის  $\partial_k u_j$  მატრიცის ზოგიერთი ინვარიანტის საწყისი მნიშვნელობის კავშირი (58) ბაზისის ინვარიანტებთან სოლენოიდური ბაროქრონული დინების რეჟიმში

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(S^2A^2) &= -b_0^2/2 + b_2/2; & \text{tr}(ASAS) &= \text{tr}(SASA) = b_0^2/2 - b_2; \\
 \text{tr}(SAS^2A) &= -b_0 b_1/8; & \text{tr}(A^2S^3) &= 3b_0 b_1/8; \\
 \text{tr}(SA^2SA^2) &= b_0^3/4 - b_0 b_2/2 + b_1^2/16; & \text{tr}(S^2AS^2A) &= b_0 b_2/2 - b_0^3/4 - b_1^2/8; \\
 \text{tr}(SA^2S^2A^2) &= -3b_0^2 b_1/16 + b_1 b_2/8; & \text{tr}(SASASA^2) &= \text{tr}(SASA) \text{tr}(SA^2) = b_0^2 b_1/16 - b_1 b_2/8; \\
 \text{tr}(SASAS^2A^2) &= \text{tr}(ASASAS^2S^2) = \text{tr}(ASAS) \text{tr}(A^2S^2)/2 = 3b_0^2 b_2/8 - b_0^4/8 - b_2^2/4; \\
 \text{tr}(SASASASA) &= \text{tr}(SA)^4 = (\text{tr}(SASA))^2/2 = (b_0^2/2 - b_2)^2/2.
 \end{aligned}$$



## V თავის დასკვნები

1. ორთოგონალური ინვარიანტების სრული მინიმალური კრებული გამოყენებულია ფიზიკური სისტემების დინამიკის აღსაწერად. სამგანზომილებიანი ინვარიანტებით ჩაწერილია განტოლება აბსოლუტურად მყარი სხეულის არარელატივისტური ბრუნვისათვის (იხ. ფ-ლა (14)), რომელიც მართებულია კოორდინატებისმიერ ორთონორმირებულ სისტემაში და არა მხოლოდ ბზრიალას ინერციის მთავარ დერძებზე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში; კერძო შემთხვევებში ეს განტოლება გვაძლევს მოძრაობის ინტეგრალებს თავისუფალი ბზრიალასათვის – ბრუნვის კინეტიკურ ენერგიას და იმპულსის მომენტის კვადრატს და განსაზღვრავს ბრუნვის კუთხური სიჩქარის კვადრატის დროზე დამოკიდებულებას.

2. რელატივისტურად მბრუნავი სისტემისათვის გამოთვლილია (რადიუსზე დამოუკიდებელი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას) სისტემის რელატივისტური ენერგია და იმპულსის მომენტი, სისტემაში მასის განაწილების სხვადასხვა შემთხვევებისათვის. ნაჩვენებია, რომ ორივე ეს სამგანზომილებიანი ინვარიანტი რჩება სასრული, როცა მბრუნავი სისტემის ეკვატორის სიჩქარე მიისწრაფის სინათლის სიჩქარისკენ, გარდა იმ შემთხვევებისა, როცა ეკვატორის მიდამოში მასის მნიშვნელოვანი ნაწილია ლოკალიზებული. პარამეტრული სახით აგებულია ასეთი სისტემების რელატივისტური ჰამილტონიანი. შესწავლილია ასეთი სისტემების დინამიკა.

3. აგებულია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემა იდეალური სითხის ბაროქრონული დინებისათვის ჰიდროდინამიური სიჩქარის იაკობის მატრიცის ორთოგონალური ინვარიანტების ტერმინებში. ეს შედეგი მიღებულია დისერტაციაში დამტკიცებული ზოგადი ხასიათის თეორემის საფუძველზე იაკობის მატრიცის და მისი ორთოგონალური ინვარიანტების დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დამოკიდებულების კანონის შესახებ (თეორემა 1 და შედეგები 1-3).

4. ნაპოვნია მიღებული არაწრფივი განტოლებების განსაკუთრებული ამონახსნები, რომლებიც წარმოადგენს ზოგადი ამონახსნების მომვლებს.

5. დამტკიცებულია, რომ არსებობს ბაროქრონული დინების მხოლოდ ორი რეჟიმი – პოტენციური, ან სოლენოიდური (თეორემა 2) და ნაპოვნია იაკობის მატრიცის ყველა დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტის დროზე დამოკიდებულების კანონი ამ რეჟიმებში (ცხრილი 1).

6. ბაროქრონული დინებისათვის ამოხსნილია ეილერის სამგანზომილებიანი ჰიდროდინამიური განტოლების ტოლფასი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა და ნაპოვნია აირის ჰიდროდინამიური სიჩქარის და სიმკვრივის დამოკიდებულება დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დინების ორივე შესაძლო რეჟიმში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ პოტენციური ბაროქრონული დინებისას ჰიდროდინამიური სიჩქარის დამოკიდებულება რადიუს-ვექტორზე (ნებისმიერად არჩეული კოორდინატთა სათავის მიმართ) აიწერება ჰაბლის არარელატივისტური კანონით.

7. ბაროქრონული სოლენოიდური დინების რეჟიმში ნაპოვნია საკმარისი და აუცილებელი პირობები იმისა, რომ ეილერის ჰიდროდინამიური განტოლებების ამონახსნს ჰქონდეს მარტივი ან ორმაგი ტალღის სახე (თეორემა 4). ნაჩვენებია, რომ ბაროქრონული სოლენოიდური დინება იზობარულია.

8. ნაპოვნია პოლინომიური თანაფარდობები (სიზიგიები) იაკობის მატრიცის ინვარიანტებს შორის, როგორც პოტენციური, ასევე სოლენოიდური დინების რეჟიმში (ცხრილი 2). ნაჩვენებია, რომ ეს თანაფარდობები მოძრაობის ინტეგრალებია.

## დისერტაციაში მიღებული შედეგები და დასკვნები

1. შემოღებულია ფუნქციონალურად პირობითად დამოუკიდებელი ფუნქციების ცნება (განმარტება 1.6, ფ-ბი (1.55), (1.56)) და დამტკიცებულია თეორემა ფუნქციების ფუნქციონალურად პირობითი დამოუკიდებლობისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობების შესახებ (ფ-ლა (1.57)).

2.  $n$ -განზომილებიან უნიტარულ  $U^n$  (ევკლიდურ  $E^n$ ) სივრცეში მოქმედი, გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული)  $P$  ოპერატორისათვის ნაპოვნია მისი დამახასიათებელი დამოუკიდებელი პარამეტრების მინიმალური რაოდენობა  $n(P)$  და ნაჩვენებია, რომ ეს რაოდენობა ემთხვევა რამზის რიცხვს (ფ-ები (2.58-59)).

3. ნაპოვნია გადაგვარებული სპექტრის მქონე ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში (წინადადება 2.20).

4.  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში ნაპოვნია ორი ერმიტული (სიმეტრიული) ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები (თეორემა 2.5).

5.  $U^n$  ( $E^n$ ) სივრცეში ზოგადი სახის ოპერატორისათვის განმარტებულია კანონიკური ბაზისი და ცხადი სახით აგებულია ამ ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმა (თეორემები 2.9, 2.11, ფ-ები (2.78), (2.111)).

6. აგებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) ინვარიანტების მინიმალური სრული კრებული – პოლინომური ინვარიანტების ბაზისი; დამტკიცებულია ძირითადი თეორემა ოპერატორის მატრიცის კანონიკური ფორმისა და პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ურთიერთცალსახა შესაბამისობის შესახებ. დამტკიცებულია აგებული პოლინომური ინვარიანტების ბაზისის ელემენტთა ფუნქციონალური დამოუკიდებლობა.

7. ნაპოვნია ზოგადი სახის ორი ოპერატორის უნიტარული (ორთოგონალური) მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისი დამოუკიდებელი პირობები (თეორემა 2.7, ფ-ლა (2.89)); ამასთან, გაუმჯობესებულია პირსის შეფასება ასეთი მსგავსებისათვის საკმარისი პირობების რაოდენობის შესახებ (ჩვენს მიერ ნაპოვნი შეფასებაა  $N \leq n^2 + 1$ , ნაცვლად პირსის მიერ მოცემული  $N \leq 2^{2n^2}$  რაოდენობისა) და ნაჩვენებია (ფ-ლა (2.105)), რომ ზოგად შემთხვევაში ეს შეფასება არ შეიძლება გაუმჯობესდეს.

8. შემოღებულია ზოგადი სახის ოპერატორის უნიტარული ინვარიანტების მატრიცა (ფ-ები (2.90-91)) და ნაჩვენებია, რომ ამ მატრიცის სტრუქტურა ემთხვევა ოპერატორის კანონიკური მატრიცის სტრუქტურას.

9. ნაპოვნია სხვადასხვა სიმეტრიის მქონე ოპერატორების წყვილების ორთოგონალური კლასიფიცირებისათვის საკმარისი და აუცილებელი პირობები მათი ინვარიანტების ბაზისების ტერმინებში (თეორემები 2.12-15); ბოლომდე გადაწყვეტილია ოპერატორთა ასეთი წყვილების უნიტარული და ორთოგონალური კლასიფიცირების ამოცანა.

10. განმარტებულია ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცა და მისი დეტერმინანტი ჯერადობების ნებისმიერი (ნატურალური) მნიშვნელობებისათვის გამოთვლილია ცხადი სახით (ფორმულები (3.5) და (3.5')).

11. განმარტებულია ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა (განმარტება 3.2, ფ-ები (3.20), (3.21)). დამტკიცებულია, რომ ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცა დადებითად არის განსაზღვრული, როცა ჯერადობები ერთმანეთისაგან განსხვავებული, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, ხოლო ცვლადები – დადებითი.

12. ნამდვილი ცვლადის ხარისხთა ჯამისათვის დამტკიცებულია ვიეტის თეორემის ანალოგიური თანაფარდობა, როცა ხარისხის მაჩვენებლები არაა მთელი (შედეგი 3.1, ფ-ლა (3.35)) და მისი გამოყენებით გამოთვლილია ლაგრანჟის ელემენტარულ ინტერპოლაციურ მრავალწევრთა შემცველი სასრული ჯამი (შედეგი 3.2, ფ-ები (3.70-70')).

13. ნებისმიერი მატრიცის  $r$ -ასოცირებული და  $r$ -ინდუცირებული მატრიცების ანალოგიურად, აგებულია ე.წ.  $r$ -ინდუცირებული მატრიცა (განმარტება 3.3, ფ-ლა (3.78)) და მისი დეტერმინანტი გამოთვლილია ცხადი სახით (ფ-ლა (3.79)).

14. ვანდერმონდის ჯერადი მატრიცის დეტერმინანტის ცხადი სახის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ II თავში შემოღებული უნიტარული ინვარიანტების სიმრავლე შედგება ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი (და, მაშასადამე, პოლინომურად დამოუკიდებელი) წევრებისაგან.

15. ვანდერმონდის განზოგადებული  $r$ -ინდუცირებული მატრიცის დეტერმინანტის ცხადი სახის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ მარტივი სპექტრის მქონე ორი არაკომუტირებადი მატრიცის უნიტარული (ნამდვილი ველის შემთხვევაში – ორთოგონალური) ინვარიანტების სისტემა (იხ. თავი II, ფ-ლა (89)), შედგება ფუნქციონალურად (და, მაშასადამე, პოლინომურად) დამოუკიდებელი წევრებისაგან.

16. ნაჩვენებია ვანდერმონდის განზოგადებული ჯერადი მატრიცის კავშირი ზოგიერთ მნიშვნელოვან სპეციალურ ფუნქციასთან (ფ-ლა (100)), კერძოდ, ეილერის ბეტა-ფუნქციასთან და ერთი და მრავალი ცვლადის ჰიპერგეომეტრიულ (ჰგ) ფუნქციებთან, რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ მათემატიკურ და ფიზიკურ ამოცანებში.

17. შემოღებულია განზოგადებული,  $(n+1)$  პარამეტრზე დამოკიდებული B-ფუნქციის განმარტება (ფ-ლა (4.1)), რომლის კერძო შემთხვევაა ეილერის ბეტა-ინტეგრალი ( $n=1$  შემთხვევაში). შესწავლილია განზოგადებული ბეტა-ფუნქციის თვისებები, კერძოდ, ნაჩვენებია ამ ფუნქციის თანაბარი შემოსაზღვრულობა (ფ-ლა (4.11)) მისი ყოველი არგუმენტის შესაბამის კომპლექსურ სიბრტყეზე. ნაპოვნია განზოგადებული ბეტა-ფუნქციის ზედა ზღვარი (ფ-ლა (4.113)).

18. დამტკიცებულია თეორემა განზოგადებულ B-ფუნქციაში შემავალი ერთი და მრავალი ცვლადის ჰგ ფუნქციათა სინგულარობების შეკვეცის შესახებ.

19. ნაპოვნია ახალი თანაფარდობები  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციათა შორის. დაზუსტებულია მოსაზღვრე ჰგ ფუნქციების დამაკავშირებელ თანაფარდობათა რაოდენობა და მოცემულია ამ თანაფარდობათა სრული სისტემა ცხადი სახით (ცხრილი 6). ერთი ცვლადის შემთხვევაში ეს თანაფარდობები ემთხვევა გაუსის ცნობილ ფორმულებს, ხოლო  $n=2$  შემთხვევაში იძლევა 38 ფორმულას აპელის ჰგ ფუნქციისათვის. ეს შედეგი განსხვავდება აპელისა და კამპე დე ფერიეს მონოგრაფიაში დეკლარირებული რიცხვისგან ამ თანაფარდობათა რაოდენობისათვის (56).

20. ცხადი სახით გამოთვლილია ჰგ განტოლების კუმერის ამონახსნების ყველა არატრივიალური წყვილის ვრონსკიანი. ნაპოვნი თანაფარდობები გამოყენებულია სპეციალური და ელემენტარული ფუნქციების ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის ანალიზურად გამოთვლისათვის. მიღებული შედეგების ნაწილი ახალია.

21. სასრული სახით გამოთვლილია სპეციალური ფუნქციების შემცველი ზოგიერთი მწკრივი; მიღებულია ზაალშუტცის ფორმულის ტიპის რამდენიმე ახალი თანაფარდობა (ფ-ლა (4.39)-(40)). გამოყვანილია რამდენიმე ახალი თანაფარდობა განზოგადებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისათვის (ფ-ლა (4.40')).

22. ორთოგონალური ინვარიანტების სრული მინიმალური კრებული გამოყენებულია ფიზიკური სისტემების დინამიკის აღსაწერად. სამგანზომილებიანი ინვარიანტებით ჩაწერილია განტოლება აბსოლუტურად მყარი სხეულის ბრუნვისათვის (იხ. ფ-ლა (5.14)), რომელიც მართებულია კოორდინატთა ნებისმიერ ორთონორმირებულ სისტემაში და არა მხოლოდ ბზრიალას ინერციის მთავარ ღერძებზე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც არარელატივისტური ბზრიალასათვის განსაზღვრავს სისტემის დინამიკას, კერძოდ, კუთხური სიჩქარის კვადრატის დროზე დამოკიდებულებას.

23. რელატივისტურად მბრუნავი სისტემისათვის გამოთვლილია (რადიუსზე დამოუკიდებელი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას) სისტემის ენერჯია და იმპულსის მომენტი, სისტემაში მასის განაწილების სხვადასხვა შემთხვევებისათვის. ნაჩვენებია, რომ ეს ორივე ეს სამგანზომილებიანი ინვარიანტი რჩება სასრული, როცა მბრუნავი სისტემის ეკვატორის სიჩქარე მიისწრაფის სინათლის სიჩქარისკენ, ვარდა იმ შემთხვევებისა, როცა ეკვატორის მიდამოში მასის მნიშვნელოვანი ნაწილია ლოკალიზებული. პარამეტრული სახით აგებულია ასეთი სისტემების რელატივისტური ჰამილტონიანი. შესწავლილია ასეთი სისტემების დინამიკა.

24. აგებულია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემა იდეალური სითხის ბაროქრონული დინებისათვის ჰიდროდინამიური სიჩქარის იაკობის მატრიცის ორთოგონალური ინვარიანტების ტერმინებში. ეს შედეგი მიღებულია დისერტაციაში დამტკიცებული ზოგადი ხასიათის თეორემის საფუძველზე, რომელიც განსაზღვრავს იაკობის მატრიცისა და მისი ორთოგონალური ინვარიანტების დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დამოკიდებულების კანონს (თეორემა 5.1 და შედეგები 5.1-3).

25. დამტკიცებულია, რომ არსებობს ბაროქრონული დინების მხოლოდ ორი რეჟიმი – პოტენციური, ან სოლენოიდური (თეორემა 5.2) და ნაპოვნია იაკობის მატრიცის ყველა დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტის დროზე დამოკიდებულების კანონი ორივე რეჟიმში (ცხრილი 1).

26. ბაროქრონული დინებისათვის ამოსხნილია ეილერის სამგანზომილებიანი ჰიდროდინამიური განტოლებების სისტემის ტოლფასი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა და ნაპოვნია აირის ჰიდროდინამიური სიჩქარის და სიმკვრივის დამოკიდებულება დროზე და სივრცით კოორდინატებზე დინების ორივე შესაძლო რეჟიმში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ პოტენციური ბაროქრონული დინებისას ჰიდროდინამიური სიჩქარის დამოკიდებულება რადიუს-ვექტორზე (ნებისმიერად არჩეული კოორდინატთა სათავის მიმართ) აიწერება ჰაბლის არარელატივისტური კანონით.

27. ბაროქრონული სოლენოიდური დინების რეჟიმში ნაპოვნია საკმარისი და აუცილებელი პირობები იმისა, რომ ეილერის ჰიდროდინამიური განტოლებების ამონახსნს ჰქონდეს მარტივი ან ორმაგი ტალღის სახე (თეორემა 5.4). ნაჩვენებია, რომ ბაროქრონული სოლენოიდური დინება იზობარულია.

28. ნაპოვნია პოლინომიური თანაფარდობები (სიზიგიები) იაკობის მატრიცის ინვარიანტებს შორის (ცხრილი 2), როგორც პოტენციური, ასევე სოლენოიდური დინების რეჟიმში და ნაჩვენებია, რომ ეს თანაფარდობები არ იცვლება დროში, ე.ი. წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალებს.

## დამატება A

1. დეტერმინანტის წარმოებულისათვის ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით (4.19), (4.20) და (4.11<sub>1</sub>) ფორმულებიდან ვღებულობთ:

$$(A.1) \quad \frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z) \Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \det \begin{bmatrix} \frac{(a)_{m-k} (b)_{m-k}}{(c)_{m-k}} & k \frac{b(a-c)}{c(1-c)} \frac{(1-a)_{k-1} (1-b)_{k-1}}{(2-c)_{k-1}} \\ \frac{(a)_{m-k} (b+1)_{m-k}}{(c+1)_{m-k}} & \frac{(1-a)_k (-b)_k}{(1-c)_k} \end{bmatrix},$$

$m = 1, 2, \dots$

(4.43) ფორმულის და

$$(A.2) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$$

თანაფარდობის გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$(a)_{m-k} (1-a)_k = (-1)^k (a-k)_m, \quad (1-c)(2-c)_{k-1} = (1-c)_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

ამიტომ, გამარტივების შემდეგ, ფორმულა (A.1) ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$(A.3) \quad \frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z) \Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^m R_k(m; a, b, c) =$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(a-k)_m (b-k)_m}{(c-k)_m} \det \begin{bmatrix} 1 & k \frac{(a-c)}{(a-k)(b-k)} \\ \frac{b+m-k}{c+m-k} & \frac{b}{b-k} \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ფორმულა (A.3) სრულდება  $m=0$  მნიშვნელობისათვისაც.

(A.3) ჯამის თითოეული შესაკრები  $R_k(m; a, b, c)$  არის  $a, b, c$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია:

$$(A.4) \quad R_0(m; a, b, c) = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m}, \quad R_0(0; a, b, c) = 1,$$

$$R_k(m; a, b, c) = \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(a-k)_m (b-k)_m}{(c-k)_m} \frac{abc + ab(m-2k) + k(m-k)(c-a-b)}{(a-k)(b-k)(c+m-k)} =$$

$$= \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(a-k+1)_{m-1} (b-k+1)_{m-1}}{(c-k)_{m+1}} [abc + ab(m-2k) + k(m-k)(c-a-b)],$$

$(k = 1, \dots, m, \quad m = 1, 2, \dots)$ .

ამიტომ (A.3) ჯამი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$(A.5) \quad \sum_{k=0}^m R_k(m; a, b, c) = P_L(a, b, c) / Q_l(a, b, c),$$

სადაც  $P_L(a, b, c)$  და  $Q_l(a, b, c)$  არის, შესაბამისად,  $L$  და  $l$  ხარისხის პოლინომები  $a, b, c$  ცვლადების ერთობლიობის მიმართ:

$$L = (2m-2) + (m+1)m + 3 = (m+1)^2 + m, \quad l = (m+1)^2 = L - m.$$

შეგნიშნოთ, რომ, როცა  $m$  მცირეა, არ არის ძნელი (A.5) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირდაპირი გამოთვლა, მაგრამ უკვე  $m \geq 3$  დროს ეს გამოთვლები ძალზე შრომატევადია. რთულია ზოგადი შედეგის

$$(A.6) \quad \frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z) \Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^m R_k(m; a, b, c) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \geq 1 \end{cases}$$

ინდუქციით დამტკიცებაც.

2. (4.19) დეტერმინანტში აღვნიშნოთ  $z=1-y$  და ვისარგებლოთ (4.14) ფორმულით. გვექნება:

$$\begin{aligned}
 (A.7) \quad D(1-y) &= \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; 1-y) & (1-y) \frac{b(a-c)}{c(1-c)} F(1-a, 1-b; 2-c; 1-y) \\ F(a, b+1; c+1; 1-y) & F(1-a, -b; 1-c; 1-y) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \det \begin{bmatrix} F(a, b; a+b-c+1; y) & -(1-y) \frac{b}{1-c} F(1-a, 1-b; 2-c; 1-y) \\ F(a, b+1; a+b-c+1; y) & F(1-a, -b; 1-c; 1-y) \end{bmatrix} + \\
 &+ y^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \det \begin{bmatrix} F(c-a, c-b; c-a-b+1; y) & (1-y) \frac{a-c}{1-c} F(1-a, 1-b; 2-c; 1-y) \\ F(c-a+1, c-b; c-a-b+1; y) & F(1-a, -b; 1-c; 1-y) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left\{ \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)} D_1(y) + y^{a+b-c} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(-b)} D_2(y) \right\} + \\
 &+ y^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left\{ \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c)\Gamma(1+b-c)} D_3(y) + y^{a+b-c} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} D_4(y) \right\},
 \end{aligned}$$

სადაც გამოსახულების შემოკლებისათვის აღვნიშნეთ:

$$\begin{aligned}
 D_1(y) &= \det \begin{bmatrix} F_{11} & -(1-y)bF_{12} \\ F_{21} & (a-c)F_{22} \end{bmatrix}, & D_2(y) &= \det \begin{bmatrix} F_{11} & (1-y)\tilde{F}_{12} \\ F_{21} & \tilde{F}_{22} \end{bmatrix}, \\
 D_3(y) &= \det \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & (1-y)F_{12} \\ \tilde{F}_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, & D_4(y) &= \det \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & (1-y)(a-c)\tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & -b\tilde{F}_{22} \end{bmatrix}. \\
 F_{11} &= F(a, b; a+b-c+1; y), & F_{12} &= F(1-a, 1-b; c-a-b+1; y), \\
 F_{21} &= F(a, b+1; a+b-c+1; y), & F_{22} &= F(1-a, -b; c-a-b+1; y); \\
 \tilde{F}_{11} &= F(c-a, c-b; c-a-b+1; y), & \tilde{F}_{12} &= F(1+a-c, 1+b-c; a+b-c+1; y), \\
 \tilde{F}_{21} &= F(c-a+1, c-b; c-a-b+1; y), & \tilde{F}_{22} &= F(a-c, 1+b-c; a+b-c+1; y).
 \end{aligned}$$

თანხმად (4.17) თანაფარდობისა და გაუსის ჰგ ფუნქციის  $a \gtrsim b$  სიმეტრიისა, გვაქვს:

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= (1-y)^{1-c} \tilde{F}_{12}, & F_{21} &= (1-y)^{-c} \tilde{F}_{22}, \\
 \tilde{F}_{11} &= (1-y)^{1-c} F_{12}, & \tilde{F}_{21} &= (1-y)^{-c} F_{22}. \\
 & & & (|\arg(y-1)| < \pi)
 \end{aligned}$$

ამიტომ  $D_2(y) = D_3(y) = 0$ ,  $D_1(y) = -D_4(y)$  და (A.7) მარტივდება:

$$D(1-y) = D_1(y) \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-b)} \left\{ \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(1+b-c)} - 1 \right\}.$$

აქედან, (A.2) თანაფარდობის გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$\begin{aligned}
 D(1-y) &= D_1(y) \left\{ \frac{\sin \pi(c-a)\sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b}{-(c-a-b)\sin \pi c \sin \pi(c-a-b)} \right\} = \\
 &= \frac{1}{a+b-c} D_1(y) \frac{\cos \pi(a-b) - \cos \pi(2c-a-b) - \cos \pi(a-b) + \cos \pi(a+b)}{\cos \pi(a+b) - \cos \pi(2c-a-b)} = \frac{D_1(y)}{a+b-c}. \\
 & & & (|\arg(y-1)| < \pi)
 \end{aligned}$$

საბოლოოდ ვღებულობთ (თავდაპირველ აღნიშვნებში):

$$(A.8) \quad \det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & z \frac{b(a-c)}{c(1-c)} F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b+1; c+1; z) & F(1-a, -b; 1-c; z) \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{a+b-c} \det \begin{bmatrix} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) & -zbF(1-a, 1-b; c-a-b+1; 1-z) \\ F(a, b+1; a+b-c+1; 1-z) & (a-c)F(1-a, -b; c-a-b+1; 1-z) \end{bmatrix}. \\ (|\arg(-z)| < \pi)$$

წერტილი  $z=1$  რეგულარულია (A.8) თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში შემავალი გაუსის ჰგ ფუნქციებისათვის, სადაც ყველა ეს ფუნქცია  $\rightarrow 1$ . ამიტომ შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე  $z \rightarrow 1$ . მივიღებთ:

$$\det \begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & z \frac{b(a-c)}{c(1-c)} F(1-a, 1-b; 2-c; z) \\ F(a, b+1; c+1; z) & F(1-a, -b; 1-c; z) \end{bmatrix} \Big|_{z \rightarrow 1} = \frac{a-c+b}{a+b-c} = 1, \\ (|\arg(-z)| < \pi)$$

ამასთან, შედეგი ერთნაირია ჭრილის ზედა და ქვედა ნაპირზე, ე.ი. (A.8) დეტერმინანტში (და (4.19), (4.23)-(4.28), (4.115'') ტიპის დეტერმინანტებში) ჭრილები ბათილდება. ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით, მიღებული შედეგი მართებულია  $a, b, c$  პარამეტრების ნებისმიერი (კომპლექსური) მნიშვნელობებისათვის. ■

3. (A.6) ფორმულაში (A.4)-ის და (4.41)-ის გათვალისწინებით, გამარტივებების შემდეგ ვღებულობთ (4.39) ფორმულას. (A.6) ჯამის პირველი ( $k=0$ ) შესაკრების მარჯვენა მხარეს გადატანით და  $k \rightarrow k_1 = k-1, m \rightarrow m_1 = m-1$  აღნიშვნების შეცვლით ვღებულობთ

$$(A.9) \quad \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k}{(k+1)!} \frac{(a-k)_m (b-k)_m}{(c-k)_m} \frac{ab(c+m-2k-1) - (k+1)(m-k)(a+b-c)}{(c+m-k)(c-k-1)} = \frac{(a)_{m+1} (b)_{m+1}}{(m+1)(c)_{m+1}}, \\ (m = 1, 2, \dots),$$

სადაც გავითვალისწინეთ თანაფარდობა

$$\binom{m+1}{k+1} (-1)^k = \frac{m+1}{(k+1)!} (-m)_k.$$

გამოვიყენოთ (A.2) ფორმულიდან გამომდინარე თანაფარდობები

$$\frac{\Gamma(a+m-k)}{\Gamma(a+1-k)} = \frac{\Gamma(k-a)}{\Gamma(1-a-m+k)} \frac{\sin(a-k)}{\sin(a-k+m)} = (-1)^m \frac{\Gamma(k-a)}{\Gamma(1-a-m+k)} = (-1)^m \frac{(-a)_k}{(1-a-m)_k} \frac{\Gamma(-a)}{\Gamma(1-a-m)}, \\ \frac{\Gamma(c-k)}{\Gamma(c+m+1-k)} = \frac{\Gamma(-c-m+k)}{\Gamma(1-c+k)} \frac{\sin(-c-m+k)}{\sin(c-k)} = (-1)^{m+1} \frac{(-c-m)_k}{(1-c)_k} \frac{\Gamma(-c-m)}{\Gamma(1-c)}.$$

მაშინ (A.9) ფორმულა დაიყვანება შემდეგ თანაფარდობაზე:

$$(A.10) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} \times \\ \times [\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} + 2\tilde{a}\tilde{b}k + k(m-k)(-\tilde{a}-\tilde{b}+\tilde{c}+m)] = 0,$$

სადაც შევცვალებთ აღნიშვნები:

$$\tilde{a} = -a, \tilde{b} = -b, \tilde{c} = -c - m.$$

(A.10) გამოსახულების მარცხენა მხარე დავშალოთ სამ ნაწილად:

$$\begin{aligned} & \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} + \\ & + 2\tilde{a}\tilde{b} \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} + \\ & + (m-\tilde{a}-\tilde{b}+\tilde{c}) \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{m!}{(k-1)!(m-k-1)!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} = 0. \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ აქ ფორმულები

$$\begin{aligned} (a)_k &= a(a+1)_{k-1}, \\ (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} &= (-m)_k, \\ (-1)^k \frac{m!}{(m-k-1)!} &= m(-m+1)_k = m(1-m)(2-m)_{k-1}. \end{aligned}$$

საერთო  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \neq 0$  მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (A.11) \quad & \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k}{k!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} + \\ & - \frac{2m\tilde{a}\tilde{b}}{(\tilde{a}+1-m)(\tilde{b}+1-m)(\tilde{c}+1+m)} \sum_{k=1}^m \frac{(-m+1)_{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\tilde{a}+1)_{k-1}}{(\tilde{a}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{b}+1)_{k-1}}{(\tilde{b}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{c}+1)_{k-1}}{(\tilde{c}+2+m)_{k-1}} + \\ & + \frac{m(1-m)(m-\tilde{a}-\tilde{b}+\tilde{c})}{(\tilde{a}+1-m)(\tilde{b}+1-m)(\tilde{c}+1+m)} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-m+2)_{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\tilde{a}+1)_{k-1}}{(\tilde{a}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{b}+1)_{k-1}}{(\tilde{b}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{c}+1)_{k-1}}{(\tilde{c}+2+m)_{k-1}} = 0. \end{aligned}$$

განზოგადებული  ${}_4F_3$  ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განმარტების თანახმად,

$${}_4F_3 \left[ \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \\ \rho_1, \rho_2, \rho_3; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k (\alpha_3)_k (\alpha_4)_k}{(\rho_1)_k (\rho_2)_k (\rho_3)_k} \frac{z^k}{k!},$$

და იმის გათვალისწინებით, რომ

$$(-m)_k = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots,$$

ფორმულა (A.11) ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} & (\tilde{a}+1-m)(\tilde{b}+1-m)(\tilde{c}+1+m) {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, -m; \\ \tilde{a}+1-m, \tilde{b}+1-m, \tilde{c}+1-m; \end{matrix} 1 \right] - \\ & - 2m\tilde{a}\tilde{b} {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} \tilde{a}+1, \tilde{b}+1, \tilde{c}+1, 1-m; \\ \tilde{a}+2-m, \tilde{b}+2-m, \tilde{c}+2-m; \end{matrix} 1 \right] + \\ & + m(1-m)(m-\tilde{a}-\tilde{b}+\tilde{c}) {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, -m; \\ \tilde{a}+1-m, \tilde{b}+1-m, \tilde{c}+1-m; \end{matrix} 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში აღნიშვნების შეცვლით

$$a = \tilde{a}+1-m, \quad b = \tilde{b}+1-m, \quad c = \tilde{c}+1+m$$

მივიღებთ დასამტკიცებელ (4.40) ფორმულას.  $\blacksquare$



4. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, რომლებიც მოცემულია ცხრილში, აღებულია ცნობარებიდან [60] (იხ. ფორმულები 2.8(4-16)) და [132] (იხ. ფორმულები 6.6.8, 15.1.11, 15.1.12, 15.4.16, 17.3.9, 17.3.10); ზოგიერთ შემთხვევაში გამოყენებულია ჰგ ფუნქციის დიფერენცირების ფორმულები (იხ., მაგ., [60], 2.8(24-27)):

$$(A.12) \quad \begin{aligned} F(a+1, b; c; z) &= \frac{z^{1-a}}{a} \frac{d}{dz} [z^a F(a, b; c; z)], \quad a \neq 0, \\ F(a-1, b; c; z) &= \frac{1}{c-a} z^{1+a-c} (1-z)^{1+c-a-b} \frac{d}{dz} [z^{c-a} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)], \quad c \neq a, \\ F(a, b; c+1; z) &= \frac{c}{(c-a)(c-b)} (1-z)^{1+c-a-b} \frac{d}{dz} [(1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)], \quad c \neq a, c \neq b, \\ F(a, b; c-1; z) &= \frac{z^{2-c}}{c-1} \frac{d}{dz} [z^{c-1} F(a, b; c; z)], \quad c \neq 1. \end{aligned}$$

თანახმად (A.12) ფორმულებისა, თუ  $a, b, c$  პარამეტრების რომელიმე მნიშვნელობისათვის ფუნქცია  $F(a, b; c; z)$  გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით, მაშინ ელემენტარული ფუნქციებით გამოისახება მისი მოსაზღვრე ფუნქციებიც  $F(a \pm 1, b; c; z)$ ,  $F(a, b \pm 1; c; z)$  და  $F(a, b; c \pm 1; z)$  ( $c \pm 1 \neq 0, -1, -2, \dots, c \neq a, c \neq b, a \neq 0$ ).

მაგალითად,

$$\begin{aligned} F(a+1, 2a; a; z) &= F(2a, a+1; a; z) = \\ &= \frac{z^{1-a}}{a} \frac{d}{dz} [z^a F(a, 2a; a; z)] = \frac{z^{1-a}}{a} \frac{d}{dz} [z^a (1-z)^{-2a}] = \\ &= (1-z)^{-2a-1} (1+z), \quad a \neq 0, \end{aligned}$$

და, შესაბამისად,

$$F(a+1, 2; 2-a; z) = F(1+a, a+1; 2-a; z) = \frac{d}{dz} [z F(1, a+1; 2-a; z)].$$

შევნიშნოთ, რომ  $a$  პარამეტრის მიხედვით ანალიზური გაგრძელების შესახებ თეორემის ძალით ეს თანაფარდობები სრულდება  $a=0$  შემთხვევაშიც.

ანალოგიურად, ვინაიდან (იხ., მაგ., [132], 15.5.3 და 6.6.8)

$$\begin{aligned} F(1, a+1; 2-a; z) &= (1-z)^{-2a} F(1-2a, 1-a; 2-a; z) = \\ &= (1-z)^{-2a} (1-a) z^{a-1} B_z(1-a, 2a), \end{aligned}$$

(აქ  $B_z(\alpha, \beta)$  აღნიშნავს არასრულ ბეტა-ფუნქციას) ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} F(a+1, 2; 2-a; z) &= (1-a) \frac{d}{dz} [z^a (1-z)^{-2a} B_z(1-a, 2a)] = \\ &= (1-a) \frac{d}{dz} \left[ z^a (1-z)^{-2a} \int_0^z t^{-a} (1-t)^{2a-1} dt \right] = \\ &= (1-a) \left\{ (1-z)^{-1} + B_z(1-a, 2a) [a z^{a-1} (1-z)^{-2a} + 2a z^a (1-z)^{-2a-1}] \right\} = \\ &= \frac{1-a}{1-z} \left[ 1 + a \frac{z^{a-1} (1+z)}{(1-z)^{2a}} B_z(1-a, 2a) \right] \end{aligned}$$

და მისთ. მიღებული შედეგები დაჯამებულია ცხრილში 3 (იხ. შესაბამისი ფაილი).

ცხრილში 4 მოცემულია ზოგიერთი ახალი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის შედეგები.

| პარამეტრები $a, b, c$       | არგუმენტი                    | $F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$           | $F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; z)$                       |
|-----------------------------|------------------------------|---|---|
| $a, b, b$                   | $z$                          | $(1-z)^{-a}$  | $(1-b)z^{b-1}(1-z)^{-a} B_z(1-b, a)$  |
| $a, b, a+1$                 | $z$                          | $az^{-a} B_z(a, 1-b)$                                       | 1   |
| $2a, a+1, a$                | $z$                          | $\frac{1+z}{(1-z)^{1+2a}}$                                  | $\frac{1-a}{1-z} \left[ 1 + a \frac{z^{a-1}(1+z)}{(1-z)^{2a}} B_z(1-a, 2a) \right]$ |
| $a, 1-a, c$                 | $(1-z)/2$                    | $\Gamma(c)[(z-1)/(z+1)]^{(1-c)/2} P_{-a}^{1-c}(z)$          | $2^{1-c} \Gamma(2-c)(z^2-1)^{(c-1)/2} P_{-a}^{c-1}(z)$                              |
| $a/2, a/2+1/2, a+1$         | $(\operatorname{ch} z)^{-2}$ | $e^{-az}(2\operatorname{ch} z)^a$                           | $e^{az}(2\operatorname{ch} z)^{-a}$   |
| $a/2, -a/2, 1/2$            | $\sin^2 z$                   | $\cos az$   | $(a \sin z)^{-1} \sin az$   |
| $a/2, -a/2, 1/2$            | $-\operatorname{sh}^2 z$     | $\operatorname{ch} az$                                      | $(a \operatorname{sh} z)^{-1} \operatorname{sh} az$                                 |
| $1/2 + a/2, 1/2 - a/2, 1/2$ | $\sin^2 z$                   | $(\cos z)^{-1} \cos az$                                     | $(a \sin z \cos z)^{-1} \sin az$  |
| $a/2, a/2+1/2, 1/2$         | $\operatorname{th}^2 z$      | $(\operatorname{ch} z)^a \operatorname{ch} az$              | $(a \operatorname{th} z)^{-1} (\operatorname{ch} z)^a \operatorname{sh} az$         |
| $a/2, 1/2+a/2, 1/2$         | $-\operatorname{tg}^2 z$     | $(\cos z)^a \cos az$  | $(a \operatorname{tg} z)^{-1} (\cos z)^a \sin az$                                   |
| $1/2 + a/2, 1/2 - a/2, 3/2$ | $\sin^2 z$                   | $(a \sin z)^{-1} \sin az$                                   | $\cos az$   |
| $1+a/2, 1-a/2, 3/2$         | $\sin^2 z$                   | $(a \sin z \cos z)^{-1} \sin az$                            | $(\cos z)^{-1} \cos az$   |
| $1/2, 1/2, 3/2$             | $z^2$                        | $z^{-1} \operatorname{arcsin} z$                            | 1   |
| $1/2, 1, 3/2$               | $-z^2$                       | $z^{-1} \operatorname{arctg} z$                             | 1   |
| $1, 1, 2$                   | $z$                          | $-z^{-1} \ln(1-z)$  | 1   |
| $1/2, 1, 3/2$               | $z^2$                        | $(2z)^{-1} \ln[(1+z)/(1-z)] = z^{-1} \operatorname{arth} z$ | 1   |
| $1/2, 1/2, 1$               | $z$                          | $(2/\pi) F(\pi/2 z)$  | $(2/\pi) F(\pi/2 z)$  |
| $-1/2, 1/2, 1$              | $z$                          | $(2/\pi) E(\pi/2 z)$  | $(2/\pi) E(\pi/2 z)$  |

|  |  |
|--|--|
| $\int_{z_0}^z \frac{u^{-1}(1-u)^{-a-b} du}{[F(a, b; 1; u)]^2}$         | $-B(a, b) \left[ \frac{F(a, b; a+b; 1-z)}{F(a, b; 1; z)} - \frac{F(a, b; a+b; 1-z_0)}{F(a, b; 1; z_0)} \right]$                        |
| $\int_{1/2}^1 t^{-1}(1-t)^{-1} [F(a, 1-a; 1; t)]^{-2} dt$              | $\frac{\pi}{\sin \pi a}$   |
| $\int_0^1 \frac{u^{b-1}}{(1-u)^b (1-zu)^a} \ln \frac{u(1-u)}{1-zu} du$ | $\frac{\pi}{\sin \pi b} \{ [\psi(1-b) - \psi(a) - \ln z] F(a, b; 1; z) - B(a, b) F(a, b; a+b; 1-z) \}$                                 |
| $\int_0^1 \ln \frac{u(1-u)}{1-zu} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-zu)}}$      | $\mathbf{K}(z) \ln z^{-2} - 2\pi \mathbf{K}(1-z)$  |
| $\int_0^1 \ln \frac{u(1-u)}{1-zu} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-zu)^3}}$    | $-\frac{2}{1-z} \left[ (2 + \ln z) \mathbf{E}(z) + \pi (\mathbf{E}(1-z) - \mathbf{K}(1-z)) \right]$                                    |
| $\int_0^1 u^{-b} (1-u)^{b-1} \ln(1-zu) du$                             | $\frac{\pi}{\sin \pi b} \left[ \psi(b) + \gamma + \ln z + b^{-1} F(1, b; 1+b; 1-z) \right]$  |
| $\int_{z_0}^z \frac{du}{u(1-u) \mathbf{K}^2(u)}$                       | $-\frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\mathbf{K}(1-z)}{\mathbf{K}(z)} - \frac{\mathbf{K}(1-z_0)}{\mathbf{K}(z_0)} \right\}$                    |
| $\int_{z_0}^z \frac{du}{u \mathbf{E}^2(u)}$                            | $-\frac{4}{\pi} \left\{ (1-z) \frac{\mathbf{D}(1-z)}{\mathbf{E}(z)} - (1-z_0) \frac{\mathbf{D}(1-z_0)}{\mathbf{E}(z_0)} \right\}$      |
| $\int_{z_0}^z \frac{du}{u(1-u) \mathbf{K}(u) \mathbf{K}(1-u)}$         | $\frac{4}{\pi} \ln \frac{\mathbf{K}(z) \mathbf{K}(1-z_0)}{\mathbf{K}(z_0) \mathbf{K}(1-z)}$  |
| $\int_{z_0}^z \frac{du}{u(1-u) \mathbf{E}(u) \mathbf{D}(1-u)}$         | $\frac{4}{\pi} \ln \left[ \frac{(1-z_0) \mathbf{D}(1-z_0)}{(1-z) \mathbf{D}(1-z)} \cdot \frac{\mathbf{E}(z)}{\mathbf{E}(z_0)} \right]$ |
| $\int_{1/2}^1 \frac{du}{u(1-u) \mathbf{K}^2(u)}$                       | $\frac{4}{\pi}$  |
| $\int_{1/2}^z \frac{du}{u(1-u) \mathbf{K}(u) \mathbf{K}(1-u)}$         | $\frac{4}{\pi} \ln(2\mathbf{K}(z)/\pi)$  |
| $\int_0^{1/2} \frac{du}{u(1-u) \mathbf{K}(u) \mathbf{K}(1-u)}$         | $0$  |
| $\int_{1/2}^1 \frac{du}{u \mathbf{E}^2(u)}$                            | $\frac{4}{\pi} \left[ \frac{\mathbf{K}(1/2)}{\mathbf{E}(1/2)} - 1 \right]$   |
| $\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u^2-1) [P_\nu^\mu(u)]^2}$                 | $\frac{\pi}{2\sin \pi \mu} \left[ \frac{P_\nu^\mu(u_2)}{P_\nu^{-\mu}(u_2)} - \frac{P_\nu^\mu(u_1)}{P_\nu^{-\mu}(u_1)} \right]$         |

5. კოეფიციენტები  $\alpha_q$  და  $\beta_q$  კუმერის (4.29) თანაფარდობებში, რომლებიც აკავშირებს ერთმანეთთან გაუსის ჰიპერგეომეტრიული განტოლების კუმერის  $u_1(z), \dots, u_6(z)$  ამონახსნებს (იხ., მაგ., [60], 2.9(35), (37), (39), (43)), შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$(A.13) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \beta_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= \frac{\Gamma(1+a+b-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}, & \beta_2 &= \frac{\Gamma(1+a+b-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ \alpha_3 &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-b)}, & \beta_3 &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} e^{i\pi\varepsilon(c-1)}, \\ \alpha_4 &= \frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(1-a)}, & \beta_4 &= \frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} e^{i\pi\varepsilon(c-1)}, \\ \alpha_5 &= 0, & \beta_5 &= 1, \\ \alpha_6 &= \frac{\Gamma(1-a-b+c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, & \beta_6 &= \frac{\Gamma(1-a-b+c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

სადაც

$$\varepsilon \equiv \text{sign}(\text{Im}z) = \begin{cases} +1, & \text{Im}z > 0, \\ -1, & \text{Im}z < 0. \end{cases}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (4.31) ფორმულაში და გამოვიყენოთ ფორმულა (A.2) და ადვილად შესამოწმებელი თანაფარდობა

$$\sin \alpha + \sin(\beta - \alpha) e^{\pm i\beta} = \sin \beta e^{\pm i(\beta - \alpha)}.$$

გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ შედეგებს, რომლებიც დაჯამებულია ცხრილში 5:

$$(A.14) \quad \begin{aligned} K_{1q} = -K_{q1} &= \\ &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, & q &= 2; \end{aligned}$$

$$(A.15) \quad \begin{aligned} &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} e^{i\pi\varepsilon(c-1)}, & q &= 3; \end{aligned}$$

$$(A.16) \quad \begin{aligned} &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} e^{i\pi\varepsilon(c-1)}, & q &= 4; \end{aligned}$$

$$(A.17) \quad \begin{aligned} &= 1-c, & q &= 5; \end{aligned}$$

$$(A.18) \quad \begin{aligned} &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, & q &= 6; \end{aligned}$$

$$(A.19) \quad \begin{aligned} K_{2q} = -K_{q2} &= \\ &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)} e^{i\pi\varepsilon(c-b)}, & q &= 3; \end{aligned}$$

$$(A.20) \quad \begin{aligned} &= \frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(1+b-c)} e^{i\pi\varepsilon(c-a)}, & q &= 4; \end{aligned}$$

$$(A.21) \quad \begin{aligned} &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}, & q &= 5; \end{aligned}$$

$$(A.22) \quad = a + b - c, \quad q = 6;$$

$$K_{3q} = -K_{q3} =$$

$$(A.23) \quad = (b - a)e^{i\pi\epsilon c}, \quad q = 4;$$

$$(A.24) \quad = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(1 + a - b)}{\Gamma(1 + a - c)\Gamma(1 - b)}, \quad q = 5;$$

$$(A.25) \quad = -\frac{\Gamma(1 + a - b)\Gamma(1 - a - b + c)}{\Gamma(1 - b)\Gamma(c - b)} e^{i\pi\epsilon a}, \quad q = 6;$$

$$K_{4q} = -K_{q4} =$$

$$(A.26) \quad = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(1 - a + b)}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 + b - c)}, \quad q = 5;$$

$$(A.27) \quad = -\frac{\Gamma(1 - a + b)\Gamma(1 - a - b + c)}{\Gamma(1 - a)\Gamma(c - a)} e^{i\pi\epsilon b}, \quad q = 6;$$

$$(A.28) \quad K_{56} = -K_{65} = -\frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(1 - a - b + c)}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 - b)}.$$

(4.29-30) და (A.14)-(A.28) ფორმულებიდან გამომდინარეობს მრავალი ცნობილი შედეგი, კერძოდ, ფორმულები გადაგვარებული ჰგ განტოლების ამონახსნების ვრონსკიანებისათვის.

6. გამოსახულებების და ფორმულების შემოკლების მიზნით აღნიშნოთ  $F = F\left(\frac{a}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}\right)$  და

$$F(a \pm 1) = F\left(\frac{a \pm 1}{c}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}\right), \quad F(b_j \pm 1) = F\left(\frac{a}{c}; b_1, z_1, \dots; b_j \pm 1, z_j, \dots; b_n, z_n\right), \quad F(c \pm 1) = F\left(\frac{a}{c \pm 1}; \{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}\right).$$

განვიხილოთ (4.68<sub>3</sub>)-(4.68<sub>7</sub>) თანაფარდობები, როგორც განტოლებათა სისტემა  $b_l F(b_l + 1)$  უცნობების მიმართ,  $l = \overline{1, n}$ . დავიყვანოთ ის საფეხურებიან (იხ., მაგ., [59], თავი I, §2) სახეზე (ანუ გაუსის მეთოდით თანმიმდევრულად გამოვრიცხოთ  $b_l F(b_l + 1)$  შესაკრებები (4.68<sub>3</sub>-68<sub>7</sub>) განტოლებებიდან). შემოვიღოთ აღნიშვნები ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეებისათვის:

$$(A.29) \quad \begin{aligned} (b - a)F + aF(a + 1) &= A_1; \\ (b - c + 1)F + (c - 1)F(c - 1) &= A_2; \\ (a + b - c)F + (c - a)F(a - 1) &= A_3; \\ (a - c + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j)F + c^{-1}(c - a)(c - b)F(c + 1) &= A_4; \\ [a - b + z_l^{-1}(b - c) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j]F - z_l^{-1}(b - c)F(b_l - 1) &= A_{4+l}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

ამ აღნიშვნებში (4.68<sub>3,7</sub>) თანაფარდობები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(A.30) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j F(b_j + 1) &= A_1; \\ \sum_{j=1}^n b_j F(b_j + 1) &= A_2; \\ \sum_{j=1}^n (1 - z_j) b_j F(b_j + 1) &= A_3; \\ \sum_{j=1}^n (z_j^{-1} - 1) b_j F(b_j + 1) &= A_4; \\ \sum_{j=1}^n (z_j^{-1} - 1) b_j F(b_j + 1) &= A_{4+l}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

(A.30) განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით

მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
& \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1-z_j \\ z_j^{-1}-1 \\ z_j^{-1}-1 \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_{4+l} \end{array} \right. \right) \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ z_k - z_j \\ z_j^{-1} - z_k^{-1} \\ z_j^{-1} - z_k^{-1} \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - (1-z_k)A_1 \\ A_4 - (z_k^{-1}-1)A_1 \\ A_{4+l} - (z_k^{-1}-1)A_1 \end{array} \right. \right) \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ z_k - z_j \\ z_j^{-1} - z_k^{-1} \\ z_j^{-1} - z_k^{-1} \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 - (1-z_k)A_2 \\ A_4 - (z_k^{-1}-1)A_2 \\ A_{4+l} - (z_k^{-1}-1)A_2 \end{array} \right. \right) \sim \\
& \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1-z_j \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j) \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j) \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 - z_k^{-1}A_3 \\ A_{4+l} - z_k^{-1}A_3 \end{array} \right. \right) \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1-z_j \\ z_j^{-1} - 1 \\ 0 \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_{4+l} - A_4 \end{array} \right. \right) \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1-z_j \\ z_j^{-1} - 1 \\ 0 \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_{4+l} - A_{4+k} \end{array} \right. \right) \sim \\
& \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ z_k - z_j \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j/z_m) \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j/z_m) \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - (1-z_k)A_1 \\ A_4 - (z_k^{-1}-1)A_1 - z_m^{-1}z_k^{-1}[A_3 - (1-z_k)A_1] \\ A_{4+l} - (z_k^{-1}-1)A_1 - z_m^{-1}z_k^{-1}[A_3 - (1-z_k)A_1] \end{array} \right. \right) \sim \\
& \sim \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ z_k - z_j \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j/z_m) \\ (z_j^{-1} - z_k^{-1})(1-z_j/z_m) \end{array} \right]_{j=1,n} \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 - (1-z_k)A_2 \\ A_4 - (z_k^{-1}-1)A_2 - z_m^{-1}z_k^{-1}[A_3 - (1-z_k)A_2] \\ A_{4+l} - (z_k^{-1}-1)A_2 - z_m^{-1}z_k^{-1}[A_3 - (1-z_k)A_2] \end{array} \right. \right) \cdot \\
& \quad (l=\overline{1,n}, 1 \leq k < m \leq n)
\end{aligned}$$

თითოეული ამ გამოსახულებიდან, (A.29) აღნიშვნების შეტანის და გამარტივების შემდეგ, ვპოულობთ თანაფარდობებს მოსახლვერე ჰგ ფუნქციებს შორის – **ცხრილი 6**:

$$(A.31) \quad (a-b)F - aF(a+1) + \sum_{j=1}^n b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.32) \quad (c-b-1)F - (c-1)F(c-1) + \sum_{j=1}^n b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.33) \quad (c-a-b)F + (a-c)F(a-1) + \sum_{j=1}^n (1-z_j)b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.34) \quad \left( c - a - \sum_{j=1}^n z_j^{-1}b_j \right) F - c^{-1}(c-a)(c-b)F(c+1) + \sum_{j=1}^n (z_j^{-1}-1)b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.35) \quad \left[ b - a + z_l^{-1}(c-b) - \sum_{j=1}^n z_j^{-1}b_j \right] F + z_l^{-1}(b-c)F(b_l-1) + \sum_{j=1}^n (z_j^{-1}-1)b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.36) \quad (a-c+1)F - aF(a+1) + (c-1)F(c-1) = 0;$$

$$(A.37) \quad [2a-c+z_k(b-a)]F - (1-z_k)aF(a+1) + (c-a)F(a-1) + \sum_{j=1}^n (z_j-z_k)b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.38) \quad [b-c-z_k^{-1}(b-a) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1}b_j]F - (z_k^{-1}-1)aF(a+1) + c^{-1}(c-a)(c-b)F(c+1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1}-z_j^{-1})b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.39) \quad [z_k^{-1}(a-b) + z_l^{-1}(b-c) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F - (z_k^{-1} - 1) a F(a+1) - z_l^{-1}(b-c) F(b_l-1) + \\ + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1}) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.40) \quad [a-1 + z_k(b-c+1)] F + (c-a) F(a-1) - (1-z_k)(c-1) F(c-1) + \sum_{j=1}^n (z_j - z_k) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.41) \quad [a+b-2c+1 - z_k^{-1}(b-c+1) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F + c^{-1}(c-a)(c-b) F(c+1) - \\ - (z_k^{-1} - 1)(c-1) F(c-1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1}) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.42) \quad [a-c+1 + (z_l^{-1} - z_k^{-1})(b-c) - z_k^{-1} + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F + z_l^{-1}(c-b) F(b_l-1) - \\ - (z_k^{-1} - 1)(c-1) F(c-1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1}) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.43) \quad [(c-a)(z_k^{-1} - 1) - \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1}) b_j] F - z_k^{-1}(c-a) F(a-1) + c^{-1}(c-a)(c-b) F(c+1) + \\ + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(1-z_j) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.44) \quad [(z_k^{-1} - 1)(b-a) + (z_l^{-1} - z_k^{-1})(b-c) - \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1}) b_j] F - z_k^{-1}(c-a) F(a-1) + \\ + z_l^{-1}(c-b) F(b_l-1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(1-z_j) b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.45) \quad (z_l^{-1} - 1) F - z_l^{-1} F(b_l-1) + c^{-1}(c-a) F(c+1) = 0;$$

$$(A.46) \quad (z_m^{-1} - z_k^{-1}) F - z_m^{-1} F(b_m-1) + z_k^{-1} F(b_k-1) = 0;$$

$$(A.47) \quad [b-c + (z_k^{-1} + z_m^{-1})(b-a) + z_k^{-1} z_m^{-1}(c-2a) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F + (z_k^{-1} - 1)(z_m^{-1} - 1) a F(a+1) - \\ - z_k^{-1} z_m^{-1}(c-a) F(a-1) + c^{-1}(c-a)(c-b) F(c+1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(z_m^{-1} - z_j^{-1}) z_j b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.48) \quad [(z_k^{-1} + z_m^{-1})(b-a) + z_l^{-1}(c-b) + z_k^{-1} z_m^{-1}(2a-c) - \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F - (z_k^{-1} - 1)(z_m^{-1} - 1) a F(a+1) + \\ + z_k^{-1} z_m^{-1}(c-a) F(a-1) - z_l^{-1}(c-b) F(b_l-1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(z_m^{-1} - z_j^{-1}) z_j b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.49) \quad [a+b-2c+1 + (z_k^{-1} + z_m^{-1})(c-b-1) - z_k^{-1} z_m^{-1}(a-1) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F - z_k^{-1} z_m^{-1}(c-a) F(a-1) + \\ + c^{-1}(c-a)(c-b) F(c+1) + (z_k^{-1} - 1)(z_m^{-1} - 1)(c-1) F(c-1) + \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(z_m^{-1} - z_j^{-1}) z_j b_j F(b_j+1) = 0;$$

$$(A.50) \quad [a-c+1 + z_l^{-1}(b-c) + (z_k^{-1} + z_m^{-1})(c-b-1) - z_k^{-1} z_m^{-1}(a-1) + \sum_{j=1}^n z_j^{-1} b_j] F - z_k^{-1} z_m^{-1}(c-a) F(a-1) + \\ + z_l^{-1}(c-b) F(b_l-1) + (z_k^{-1} - 1)(z_m^{-1} - 1)(c-1) F(c-1) - \sum_{j=1}^n (z_k^{-1} - z_j^{-1})(z_m^{-1} - z_j^{-1}) z_j b_j F(b_j+1) = 0.$$

$$(l = \overline{1, n}, \quad 1 \leq k < m \leq n)$$

შეგნიშნოთ, რომ მიღებული თანაფარდობები  $n=1$  შემთხვევაში დაიყვანება გაუსის ცნობილ 15 თანაფარდობაზე (იხ., მაგ., [60], 2.8(31)-2.8(45)). რაც შეეხება  $n=2$  შემთხვევას, ჩვენს მიერ მიღებული თანაფარდობების სრული რაოდენობა  $N=38$  განსვავდება [62] მონოგრაფიაში აპელის  $F_1$  ფუნქციისათვის განცხადებული რაოდენობისაგან  $N=56$ .

შევაფასოთ მიღებულ თანაფარდობათა საერთო რაოდენობა.

(4.60-65) ფორმულები (რომლებიც  $n=2$  შემთხვევაში დაიყვანება 8 ცნობილ ([62], §IV, გვ. 21; იხ., აგრეთვე, [136]) თანაფარდობაზე), გვაძლევს განტოლებათა სისტემას (A.30), რომლის მატრიცის რანგი (ანუ წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალური რაოდენობა) =3. მაშასადამე, ამ სისტემიდან შესაძლებელია ვიპოვოთ არაუმეტეს სამი  $F(b_j+1)$  შესაკრებისა. მიღებული ამონახსნები აკავშირებს  $F$  ფუნქციას და მის მოსაზღვრე  $n+2$  ფუნქციას, ამასთან, ყველა ამ თანაფარდობაში ერთი შესაკრები შეიცავს  $F(a-1)$  ფუნქციას, ხოლო  $n-2$  შესაკრები – ფუნქციებს  $F(b_j+1)$ ,  $j=\overline{1, n}$  (იხ. ფ-ები (A.47)-(A.50)). ნაპოვნი ამონახსნების შეტანა დანარჩენ (წრფივად დამოკიდებულ) განტოლებებში გადააქცევს ამ განტოლებებს იგივეობებად, რომლებიც არ შეიცავს ფუნქციებს  $F(b_j+1)$ ,  $j=\overline{1, n}$  (იხ. განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობები – ფორმულები (A.36), (A.45) და (A.46)).

ამრიგად, ჰგ  $F$  ფუნქციისა და მისი მოსაზღვრე ფუნქციების დამაკავშირებელი თანაფარდობები, მათში  $F(b_j+1)$  ფუნქციების შემცველ შესაკრებთა რაოდენობის მიხედვით, შეიძლება ოთხი სხვადასხვა ტიპის იყოს:

1) თანაფარდობები რომლებიც არც ერთ ასეთ წევრს არ შეიცავს, მათი რაოდენობაა  $N_0=1+n+C_n^2$ . ესაა განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობები (A.36), (A.45), (A.46);

2) თანაფარდობები, რომლებიც შეიცავს  $n-2$  ასეთ შესაკრებს; დანარჩენი 3 შესაკრებიდან ერთი შეიცავს  $F(a-1)$  ფუნქციას, ხოლო ორი უნდა ამოვარჩიოთ სიმრავლიდან  $\{F(a+1), F(c+1), F(c-1), F(b_l-1) | l=\overline{1, n}\}$ . ამასთან, არ შეიძლება ერთდროულად ავარჩიოთ წყვილები  $\{F(a+1), F(c-1)\}$ ,  $\{F(c+1), F(b_l-1)\}$ ,  $\{F(b_k-1), F(b_l-1)\}$  ( $k, l=\overline{1, n}$ ), რომლებიც განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობებშია გათვალისწინებული. ამ თანაფარდობების რაოდენობა არის  $N_{n-2} = C_n^{n-2} [C_{n+3}^2 - (1+n+C_n^2)] = C_n^2 [C_{n+3}^2 - N_0]$ .

3)  $N_{n-1}$  თანაფარდობა, რომელიც შეიცავს  $n-1$  შესაკრებს  $F(b_j+1)$  ფუნქციებით და ორ შესაკრებს სიმრავლიდან  $\{F(a+1), F(a-1), F(c+1), F(c-1), F(b_l-1) | l=\overline{1, n}\}$  ამასთან, როგორც წინა შემთხვევაში, არ შეიძლება ერთდროულად ავარჩიოთ წყვილები  $\{F(a+1), F(c-1)\}$ ,  $\{F(c+1), F(b_l-1)\}$ ,  $\{F(b_k-1), F(b_l-1)\}$  ( $k, l=\overline{1, n}$ ). ამიტომ  $N_{n-1} = C_n^{n-1} (C_{n+4}^2 - N_0)$ .

4)  $N_n = C_{n+4}^1 = n+4$  თანაფარდობა, რომელიც შეიცავს  $n$  შესაკრებს  $F(b_j+1)$  ფუნქციებით.

ამრიგად, მიღებული თანაფარდობების სრული რაოდენობა შეადგენს

$$(A.51) \quad N = N_0 + N_{n-2} + N_{n-1} + N_n =$$

$$= N_0 + C_n^2 (C_{n+3}^2 - N_0) + C_n^1 (C_{n+4}^2 - N_0) = (n+2)[(n+1)(n+1/2) + 2].$$

კერძო შემთხვევებში ვღებულობთ:

$$N|_{n=1} = 3(2 \cdot 3/2 + 2) = 15 \quad (n=1, \text{ გაუსის თანაფარდობები, ფ-ები (A.31)-(A.45)});$$

$$N|_{n=2} = 4(3 \cdot 5/2 + 2) = 38 \quad (n=2, \text{ თანაფარდობები აპელის ფუნქციისათვის } F_1).$$

როგორც ვხედავთ, ნაპოვნი თანაფარდობათა რაოდენობის განსხვავება [62] მონოგრაფიაში დეკლარირებულ მონაცემთან დაკავშირებულია იმასთან, რომ ამ თანაფარდობებში (კერძოდ, (A.30) განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობებში (A.36), (A.45), (A.46)) ზოგიერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლია. შესაბამისი თანაფარდობები, რომლებსაც [62] მიიჩნევს განსხვავებულებად, სინამდვილეში ერთმანეთს ემთხვევა და ცალ-ცალკე არ უნდა იყოს დათვლილი.



ფორმულა (A.51) გვიჩვენებს, რომ  $n$  ცვლადის ჰგ ფუნქციის მის მოსაზღვრე ფუნქციებთან დამაკავშირებელი თანაფარდობების რაოდენობა იზრდება ცვლადთა რაოდენობის ზრდასთან ერთად, როგორც  $n^3$ .

ამრიგად,  $4+n$  განტოლება (A.30) მთლიანად განსაზღვრავს თანაფარდობათა სიმრავლეს მოსაზღვრე ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს შორის. ამასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ  $n=1$  შემთხვევაში (გაუსის ჰგ ფუნქციისათვის) ეს სისტემა შეიცავს 5 განტოლებას, რომელთაგან, გაუსის ფუნქციის  $F(a+1)=F(b+1)$  სიმეტრიის გათვალისწინებით, მხოლოდ ოთხი განტოლებაა სხვადასხვა.

ვინაიდან  $n=2$  შემთხვევაში (აპელის  $F_1$  ფუნქციისათვის) ფორმულები (A.47)-(A.50) არ შეიცავს  $F(b_j+1)$  ფუნქციებს, ვასკენით, რომ

*აპელის  $F_1$  ფუნქციის მოსაზღვრე ნებისმიერი ოთხი ფუნქცია დაკავშირებულია 38 წრფივი თანაფარდობით, რომელთა კოეფიციენტები არის  $F_1$  ფუნქციის პარამეტრების და ცვლადების რაციონალური ფუნქციები.* ■

## დამატება B

1. 5.1 წინადადების დამტკიცება.  $J=[\partial_k u_i]$  მატრიცის ინვარიანტები დაკავშირებულია მისი მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტებთან თანაფარდობებით:

$$(B.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{tr} J &= \partial_i u_i = k_1, \\ \operatorname{tr}(J^2) &= (\partial_i u_j)(\partial_j u_i) = k_1^2 - 2k_2, \\ \operatorname{tr}(J^3) &= (\partial_i u_j)(\partial_j u_k)(\partial_k u_i) = k_1 \operatorname{tr} J^2 - k_1 k_2 + 3k_3 = k_1^3 - 3k_1 k_2 + 3k_3. \end{aligned}$$

(B.1) გამოსახულებიდან, (5.50) განტოლებების გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$\partial_i k_1 = k_1' = \partial_i(\partial_k u_k) = \partial_k(\partial_i u_k) = -\partial_k(u_j \partial_j u_k) = -(\partial_k u_j)(\partial_j u_k) - u_j \partial_j \partial_k u_k = -(\partial_k u_j)(\partial_j u_k) + u_j \partial_j(\rho^{-1} \partial_i \rho).$$

ამ გამოსახულების მეორე შესაკრები  $=0$ , აირის ბაროქრონულობის პირობის ძალით. აქედან

$$(B.2) \quad k_1' = -(\partial_k u_j)(\partial_j u_k) = -\operatorname{tr} J^2$$

და, (B.12) გათვალისწინებით, ვღებულობთ (5.52<sub>1</sub>) ფორმულას და პირობებს:

$$(B.3) \quad \begin{aligned} \partial_m k_1 &= -\partial_m(\rho^{-1} \partial_i \rho) = 0, \\ \partial_m k_1' &= -\partial_m \operatorname{tr} J^2 = -2(\partial_k u_j) \partial_m(\partial_j u_k) = -\partial_m \partial_i(\rho^{-1} \partial_i \rho) = 0, \\ \partial_m k_2 &= \partial_m(k_1^2 + k_1') / 2 = 0. \end{aligned}$$

(B.1<sub>2</sub>) გამოსახულების გაწარმოებით და (B.2) გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$\begin{aligned} \partial_i k_2 = k_2' &= k_1' k_1 - \partial_i((\partial_i u_j)(\partial_j u_i)) / 2 = -k_1 \operatorname{tr} J^2 - (\partial_i u_j) \partial_j(\partial_i u_i) = -k_1 \operatorname{tr} J^2 + (\partial_i u_j) \partial_j(u_k \partial_k u_i) = \\ &= \operatorname{tr} J^3 - k_1 \operatorname{tr} J^2 + u_k(\partial_i u_j) \partial_k(\partial_j u_i) = \operatorname{tr} J^3 - k_1 \operatorname{tr} J^2 + u_k \partial_k((\partial_i u_j)(\partial_j u_i)) / 2 = \operatorname{tr} J^3 - k_1 \operatorname{tr} J^2 - u_k \partial_k k_1' / 2. \end{aligned}$$

ამ გამოსახულების ბოლო შესაკრები, (B.3) პირობების თანახმად, ნულია. შედეგად, (B.1<sub>3</sub>) თანაფარდობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ (5.52<sub>2</sub>) ფორმულას და პირობებს

$$(B.4) \quad \partial_m k_2' = 0 = \partial_m \operatorname{tr} J^3.$$

ანალოგიურად, (B.1<sub>3</sub>) გამოსახულებიდან, (5.6) იგივეობის გამოყენებით, ვპოულობთ:

$$\begin{aligned} k_3' &= (\operatorname{tr} J^3)' / 3 - k_1' k_1^2 + k_1' k_2 + k_1 k_2' = (\operatorname{tr} J^3)' / 3 + k_1^2 \operatorname{tr} J^2 - k_2 \operatorname{tr} J^2 + k_1 \operatorname{tr} J^3 - k_1^2 \operatorname{tr} J^2 = \\ &= (\operatorname{tr} J^3)' / 3 + \operatorname{tr} J^4 - k_1 k_3 = \partial_i((\partial_i u_j)(\partial_j u_k)(\partial_k u_i)) / 3 + \operatorname{tr} J^4 - k_1 k_3 = (\partial_i u_j)(\partial_j u_k) \partial_i(\partial_k u_i) + \operatorname{tr} J^4 - k_1 k_3 = \\ &= (\partial_i u_j)(\partial_j u_k) \partial_k(\partial_i u_i) + \operatorname{tr} J^4 - k_1 k_3 = (\partial_i u_j)(\partial_j u_k) \partial_k(-u_m \partial_m u_i) + \operatorname{tr} J^4 - k_1 k_3 = \\ &= -u_m(\partial_i u_j)(\partial_j u_k) \partial_m(\partial_k u_i) - k_1 k_3 = -u_m \partial_m(\partial_i u_j)(\partial_j u_k)(\partial_k u_i) / 3 - k_1 k_3 = -u_m \partial_m \operatorname{tr} J^3 / 3 - k_1 k_3. \end{aligned}$$

აქედან, (B.4) პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ (5.52<sub>3</sub>).

დიფერენციალურ განტოლებათა (5.52) სისტემის ამოსახსნელად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$(B.5_1) \quad k_1(t) = q'(t) / q(t).$$

აქედან, (5.52<sub>1</sub>) და (5.52<sub>2</sub>) ფორმულების გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$(B.5_2) \quad k_2(t) = (k_1'(t) + k_1^2(t)) / 2 = (q''/q - q'^2/q^2 + q'^2/q^2) / 2 = q''/2q,$$

$$(B.5_3) \quad k_3(t) = (k_2'(t) + k_1(t)k_2(t)) / 3 = (q'''/2q - q''q'/2q^2 + (q'/q)(q''/2q)) / 3 = q'''/6q.$$

მიღებული შედეგების შეტანა ბოლო (5.52<sub>3</sub>) ფორმულაში გვაძლევს  $q^{IV} = 0$ , საიდანაც

$$(B.6) \quad q(t) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

ხოლო ინტეგრების მუდმივები  $c_i$ ,  $i=1,3$  განისაზღვრება საწყისი პირობებით  $k_i(0) = c_i$ . ■

5.2 წინადადების დამტკიცება. ა) (5.54) გარდაქმნის გამოყენებით ვპოულობთ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \cdot \left( \delta_{mk} - t \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} - t \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_k},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5.55<sub>1</sub>):

$$(B.7_1) \quad J_u = J_v (E_3 - t J_u).$$

მეორეს მხრივ, იგივე თანაფარდობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + t \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_k},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5.55<sub>2</sub>):

$$(B.7_2) \quad (E_3 + t J_v) J_u = J_v.$$

შეგნიშნოთ, რომ, როგორც გამომდინარეობს ამ ფორმულებიდან, მატრიცები  $J_u$  და  $J_v$  კომუტირებს ერთმანეთთან.

ბ) (5.54) გარდაქმნის ფორმულებიდან, (5.50) გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \frac{dx_i}{dt} - u_i - t \frac{du_i}{dt} = -t \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0, \\ 0 &= \frac{du_j}{dt} = \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(B.8) \quad \partial_i v_j = 0. \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad \blacksquare$$

2. (5.55), (5.55') ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E_3 + t J_v = (E_3 - t J_u)^{-1} = [\Delta_{ik} (E_3 - t J_u)] \det^{-1} (E_3 - t J_u) \Rightarrow \operatorname{tr} (E_3 + t J_v) = \Delta_{kk} (E_3 - t J_u) \det^{-1} (E_3 - t J_u).$$

გავითვალისწინოთ აქ (5.62)-დან გამომდინარე თანაფარდობა

$$\det (E_3 - t J_u) = 1 - k_1 t + k_2 t^2 - k_3 t^3 = q^{-1}.$$

შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} (B.9) \quad \Delta_{kk} (E_3 - t J_u) &= \frac{1}{2} [\operatorname{tr}^2 (E_3 - t J_u) - \operatorname{tr} (E_3 - t J_u)^2] = \frac{1}{2} [(3 - t k_1)^2 - \operatorname{tr} (E_3 - 2t J_u + t^2 J_u^2)] = \\ &= 3 - t k_1 + t^2 \frac{1}{2} (k_1^2 - \operatorname{tr} J_u^2) = 3 - k_1 t + k_2 t^2. \end{aligned}$$

გამოვსახოთ (5.1) ბაზისში არასიმეტრიული  $J = (S + A) \in M_3(\square)$  მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტები ( $S_{ij} = S_{ji}$ ,  $A_{ij} = -A_{ji} = e_{ijk} \omega_k$ ):

$$\begin{aligned} (B.10) \quad k_1 &= \operatorname{tr} J = \operatorname{tr} S \equiv s_1, \\ k_2 &= \frac{1}{2} k_1^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (S + A)^2 = \frac{1}{2} k_1^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} S^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} A^2 - \operatorname{tr} (SA) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} S)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (S^2) + \frac{1}{4} \bar{\omega}^2, \\ k_3 &= \frac{1}{3} [3k_1 k_2 - k_1^3 + \operatorname{tr} (S + A)^3] = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} S)^3 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} S \operatorname{tr} (S^2) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} S \operatorname{tr} (A^2) - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} S)^3 + \frac{1}{3} \operatorname{tr} (S^3) + \operatorname{tr} (SA^2) = \\ &= \frac{1}{6} s_1^3 - \frac{1}{2} s_1 (\operatorname{tr} S^2 + \operatorname{tr} A^2) + \frac{1}{3} \operatorname{tr} S^3 + \operatorname{tr} (SA^2). \end{aligned}$$

ამ თანაფარდობებში გათვალისწინებულია, რომ  $\operatorname{tr} (SA) = \operatorname{tr} (AS^2) = \operatorname{tr} A^3 = 0$ .

გამოვითვალოთ კიდევ  $\operatorname{tr} J^4 = \operatorname{tr} (S + A)^4$ . გვაქვს:

$$\operatorname{tr} J^4 = \operatorname{tr} (S + A)^4 = \operatorname{tr} S^4 + 4 \operatorname{tr} (S^2 A^2) + 2 \operatorname{tr} (S A S A) + \operatorname{tr} A^4.$$

ჰამილტონ-კელის იგივეობის თანახმად,

$$\operatorname{tr} S^4 = s_1 \operatorname{tr} S^3 - s_2 \operatorname{tr} S^2 + s_3 s_1 = s_1^4/6 - s_1^2 \operatorname{tr} S^2 + (4/3) s_1 \operatorname{tr} S^3 + (\operatorname{tr} S^2)^2/2, \quad \operatorname{tr} A^4 = (\operatorname{tr} A^2)^2/2.$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(AS) &= \frac{1}{2} \left[ (\operatorname{tr}(AS))^2 - \operatorname{tr}(AS)^2 \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(SASA) = s_1 s_2 \omega_3^2 + s_3 s_2 \omega_1^2 + s_1 s_3 \omega_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [(s_1 + s_2)^2 - s_1^2 - s_2^2] \omega_3^2 + [(s_3 + s_2)^2 - s_3^2 - s_2^2] \omega_1^2 + [(s_1 + s_3)^2 - s_1^2 - s_3^2] \omega_2^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \left[ (\operatorname{tr} S)^2 - \operatorname{tr}(S^2) \right] + s_k^2 \omega_k^2 - s_k \omega_k^2 \operatorname{tr} S = \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \left[ (\operatorname{tr} S)^2 - \operatorname{tr}(S^2) \right] + \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle - \operatorname{tr} S \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle. \end{aligned}$$

გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ:

$$(B.11) \quad \operatorname{tr}(SASA) = 2s_1 \operatorname{tr}(SA^2) - \operatorname{tr} A^2 (s_1^2 - \operatorname{tr} S^2) / 2 - 2 \operatorname{tr}(S^2 A^2).$$

დინების სოლენოიდურობის შემთხვევაში  $\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{tr} S = 0$  და

$$(B.12) \quad \Delta_2(AS) = -\operatorname{tr}(ASAS) / 2 = b_2 / 2 - b_0^2 / 4.$$

ამასთან, ჰამილტონ-კელის თეორემის თანახმად,

$$(AS)_{ij}^3 = -(AS)_{ij} \Delta_2(AS) = (AS)_{ij} \operatorname{tr}(ASAS) / 2, \quad \operatorname{tr}(AS)^3 = 0.$$

$$(SA^2)_{ij} = -S_{ij} \omega^2 + S_{ik} \omega_k \omega_j, \quad \operatorname{tr}(SA^2) = -\omega^2 \operatorname{tr} S + \langle \bar{\omega} S \bar{\omega} \rangle = b_1 / 4;$$

$$(S^2 A^2)_{ij} = -S_{ij}^2 \omega^2 + S_{ik}^2 \omega_k \omega_j, \quad \operatorname{tr}(S^2 A^2) = -\omega^2 \operatorname{tr} S^2 + \langle \bar{\omega} S^2 \bar{\omega} \rangle = -b_0^2 / 2 + b_2 / 2;$$

$$(S^3 A^2)_{ij} = -S_{ij}^3 \omega^2 + S_{ik}^3 \omega_k \omega_j, \quad \operatorname{tr}(S^3 A^2) = -S_2 \operatorname{tr}(SA^2) + S_3 \operatorname{tr} A^2 = 3b_0 b_1 / 8;$$

$$\operatorname{tr}(S^2 ASA) = -b_0 b_1 / 8.$$

სხვა მსგავსი შედეგები დაჯამებულია ცხრილში 2.

## ლიტერატურა

1. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. 3-е изд., М., «Наука», 1989, 472 с.
2. ა. ხელაშვილი. კლასიკური თეორიული მექანიკა. თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახ. უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2005, 224 გვ.
3. W.Pauli. Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958 (რუს. პერ.: В. Паули. Теория относительности. Серия «Библиотека теоретической физики», 2-е изд., М., «Наука», 1983, 336 с.).
4. Б. В. Медведев. Начала теоретической физики, М., «Наука», 1977, 496 с.
5. A.Sudbery. Quantum mechanics and the particles of nature, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1986 (რუს. პერ.: А. Садбери, Квантовая механика и физика элементарных частиц, М., «Мир», 1989, 488 с.).
6. M. Green, J. Schwarz, E. Witten. Superstring Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1987 (რუს. პერ.: М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. Теория суперструн. т.1. Введение. М., «Мир», 1990, 518 с.).
7. M. Hamermesh. Group Theory. Addison-Wesley, Inc., 1964 (რუს. პერ.: М. Хамермеш. Теория групп. М., «Мир», 1966, 588 с.).
8. a) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. ТФ, т. III, Квантовая механика, изд. 3. М., «Наука», 1974, 752 с.  
b) ი. ვაშაკიძე, ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი. კვანტური მექანიკა, მე-2 გამოცემა, თბილისი, “მეცნიერება”, 1975, 567 გვ.
9. J. H. Schwarz. Superstrings. Phys.Today, nov., 1987, p. 33-42.
10. J. M. Pierre. Superstrings. Introduction. <http://www.sukidog.com/jpierre/strings/index.html.9/20/2006>.
11. a) E. S. Abers, V. W. Lee. Gauge theories. Phys. Rev., **C9**, 1973 (რუს. პერ. в кн.: «Квантовая теория калибровочных полей». Серия: Новости фундаментальной физики, **4**, М., Мир, 1977, 437 с.).  
b) Л. Б. Окунь. Лептоны и кварки, 2-е изд., перераб. и доп., М., «Наука», 1990, 345 с.
12. Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа). В сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 399-434.
13. H. Popp. Classical invariant theory. In: H. Popp. Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1977, p. 159-177.
14. ი. ლომიძე. კოეფიციენტები ფიზიკურ თანაფარდობებში. კრებულში: სახე ნათელი. ვაგან მამასახლისოვი. საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის გამომცემლობა, რედ. რ. ჩიქოვანი, ა. ხელაშვილი, თბილისი, 2008. გვ. 75-76.
15. Г. Б. Гуревич. Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л., Гостехиздат, 1948, 408 с.
16. W. Specht. Zur Theorie der Matrizen, II. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 1940, **B50**, s. 19-23.
17. a) C.Pearcy. A Complete Set of Unitary Invariants for Operators Generating Finite  $W^*$ -Algebras of Type I. Pacific J. Math., **v.12**, 1962, p. 1405-1416.  
b) C.Pearcy. A Complete Set of Unitary Invariants for  $3 \times 3$  Complex Matrices. Trans. Amer. Math. Soc., **v.104**, 1962, p. 425-429.
18. G.F.Smith. A complete set of unitary invariants for  $N \ 3 \times 3$  complex matrices. Tensor, **21**, 1970, p. 273-283.
19. M. Lagally. Vorlesungen über Vektor-rechnung. Akademische Verlagsgesellschaft, M.B.H., Leipzig, 1928 (რუს. პერ.: М. Лагалли. Векторное исчисление. М.-Л., ОНТИ СССР, 1936, 344 с.).
20. R. A. Horn, Ch. R. Jonson. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986 (რუს. პერ.: Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ, М., «Мир», 1989, 655 с.).
21. a) G.Rabinovitsch. Les invariants dans la théorie des homographies vectorielles. Rend.Circ.Mat. Palermo, **36**, 1913, p. 111-158.  
b) Ю. Г. Рабинович. Теория линейных вектор-функций, Одесса, 1911.
22. M. Bocher. Einführung in die Höhere Algebra. Druck und Verlag von B. G. Teubner. Leipyg Berlin, 1910 (რუს. პერ.: М. Бохер. Введение в высшую алгебру, М.-Л., ГТТИ, 1933, 291 с.).

23. A. J. M. Spencer. Theory of Invariants, Continuum Physics, v.I, part III, New York-London, 1971 (рус. пер.: Э. Спенсер. Теория инвариантов, М., «Мир», 1974, 156 с.).
24. К. С. Сибирский. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. Кишинев, «Штиинца», 1976, 268 с.
25. А. З. Петров. *a)* Пространства Эйнштейна. М., Гл. изд.-во ФМЛ, 1961, 464 с.  
*b)* Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966, 496 с.
26. Я. И. Френкель. *a)* Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons. Zeitschrift für Physik, **37**, 243, 1926.  
*b)* Теория вращающегося электрона. В сб.: Собрание избранных трудов, т. II, изд.-во АН СССР, М.-Л., 1958, с. 460-476.
27. Л. В. Овсянников. Симметрия барохронных движений газа. Сиб. мат. ж. **44**, № 5, 2003, с. 1098-1109.
28. А. П. Чупахин. Алгебраические инварианты в задачах динамики жидкости и газа. Докл. РАН, **352**, №5, 1997, с. 624-626.
29. А. П. Чупахин. О барохронных движениях газа. Докл. на V-й Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (САМГОП-2000), Пермь, Россия, 24 июня - 1 июля, 2000.
30. Л. В. Овсянников. Изобарические движения газа. Диф. уравнения, т. **30**, №10, 1994, с. 1792-1799.
31. Т. И. Санадзе, Г. Р. Хуцишвили. *a)* О запрещенных переходах и дискретном насыщении в линиях ЭПР. ЖЭТФ, **59**, №3(9), 1970, с. 753-761.  
*b)* Дискретное насыщение и радиочастотное дискретное насыщение. В кн.: Проблемы магнитного резонанса. М., «Наука», 1978, с. 206-225.
32. V. G. Berulava, R. I. Mirianashvili. Radio-frequency Discrete Saturation Measurement of the Sign of the Ligand Hyperfine Interaction Tensor Components for  $Ce^{3+}$  in  $CaF_2$ . Phys. Stat. Sol. (b), **127**, №1, 1985, p. K69-K72.
33. Ц. А. Гавашели, Д. М. Дараселия, Д. Л. Джапаридзе, Р. И. Мирианашвили, О. В. Ромелашвили, Т. И. Санадзе. Метод оценки локальных искажений решетки вблизи магнитного иона на основе параметров лигандного сверхтонкого взаимодействия:  $Ce^{3+}$  в гомологическом ряду флюорита, ФТТ, **44**, №10, 2002, с. 1795-1798.
34. *a)* Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. Теория инвариантов. Итоги науки и техн., Современ. проблемы матем., Фундам. напр. ВИНТИ, 1989, **55**, с. 137-309  
*b)* V. L. Popov, E. B. Vinberg. Algebraic geometry IV. Invariant theory. Encyclopedia of Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, p. 123-278
35. E. B. Vinberg. On Invariants of Set of Matrices. J. Lie Theory, **6**, №2, 1996, p. 249-269.
36. DeConcini, C. Procesi. *a)* A characteristic free approach to invariant theory. Adv. in Math., **vol. 21**, 1976, p. 330-354.  
*b)* Complete symmetric varieties, in: Invariant theory, Lect. Notes in Math., **996**, Springer, 1983, p. 1-44.
37. S. Donkin. The normality of conjugacy classes of matrices. Inv. Math., **vol. 101**, 1990, p. 717-736.
38. S. Donkin. Invariants of several matrices. Invent. Math. **vol. 110**, 1993, p. 389-401.
39. A. A. Lopatin. *a)* Relations between  $O(n)$ -invariants of several matrices. ArXiv: 0902.4266v1 [math.RT] 25 Feb 2009, p. 1-26.  
*b)* On minimal generating systems for  $O(3)$ -invariants. ArXiv: 0902.4270v1 [math.RT] 25 Feb 2009, p. 1-14.
40. **I. R. Lomidze**. Criteria of Unitary and Orthogonal Equivalence of Operators. Bull. Acad. Sci. Georgia, **141**, №3, 1991, p. 481-483.
41. **I. Lomidze**. Criteria of Unitary Equivalence of Hermitian Operators with Degenerate Spectrum. Georgian Math. Journal. <http://www.jeomj.rmi.acnet.ge/GMJ/v.3,#2,1996,p.141-152>.
42. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц, 4-е изд. М., «Наука», 1988, 548 с.
43. **ო. ლომიძე**. ვანდერმონდის მატრიცის განზოგადებები და სასრულგანზომილებიან სივრცეებში ოპერატორთა უნიტარული ექვივალენტობის კრიტერიუმები, მოხსენების თეზისები, საქართველოს მათემატიკოსთა III ყრილობის მასალები, თბილისი, 2001, გვ. 65.

44. a) **I. Lomidze**. On Some Generalisations of the Vandermonde Matrix and Their Relations with the Euler Beta-function. Proceedings of the Georgian Academy of Sciences. Mathematics. **1** (1993), №4, p.453-466.  
 b) **I. Lomidze**. On Some Generalisations of the Vandermonde Matrix and Their Relations with the Euler Beta-function. Georgian Math. Journal. **1** (1994), №4, p.405-417.
45. a) **И. Р. Ломидзе**. Об одном обобщении формулы для В-функции Эйлера. Препринт ОИЯИ P5-2003-156, Дубна, 2003, с. 1-32.  
 b) **I. Lomidze**. The generalization of the formula for Euler B-function and its applications. In print.
46. a) **I. Lomidze, V. Jikia**. On relations for multi-variable hypergeometric functions and their applications. Proceed. of Ilia Vekua Institute Seminars, 2009.  
 b) **I. Lomidze**. Arxiv
47. **I. Lomidze**. Proof for  $n$ -dimensional analogue of Euler formula for beta-function. Arxiv
48. Ю. В. Новожилов. Введение в теорию элементарных частиц. М., «Наука», 1972, 472 с.
49. G. Veneziano. Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories, Nuovo Cim. **57A**, 1968, p. 190.
50. M. A. Virasoro. Alternative constructions of crossing-symmetric amplitudes with Regge behavior, Phys. Rev., **177**, 1969, p.2309.
51. Z. Koba, H. B. Nielsen. Reaction amplitude for  $n$ -mesons, a generalization of the Veneziano-Bardakci-Ruegg-Virasoro model, Nucl. Phys., **B10**, 1969, p. 633.
52. A. M. Polyakov. a) Quantum geometry of bosonic string, Phys. Lett., **103B**, 1981, p. 207.  
 b) Quantum geometry of fermionic string, Phys. Lett., **103B**, 1981, p. 211.
53. К. А. Рыбников. Введение в комбинаторный анализ. 2-е изд. М., изд-во Моск. ун-та, 1985, 308 с.
54. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М., «Наука», 1989, 196 с.
55. W. Hamming. Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Co, 1962 (рус. пер.: Р. Хэмминг. Численные методы. М., «Мир», 1968, 256 с.).
56. M. Marcus, H. Minc. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Allyn and Bacon, Inc., 1964 (рус. пер.: М. Маркус, Х. Минк. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: «Наука», 1972, 232 с.).
57. H. Minc. Permanents. Encyclopedia of Math. Sci., **2**, Addison-Wesley, Inc., 1978 (рус. пер.: Х. Минк. Перманенты. М., «Мир», 1982, 216 с.).
58. В. Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М., «Наука», 1985, 192 с.
59. А. П. Мишина, И. В. Проскураков. Высшая алгебра. СМБ, М.: ГИФМЛ, 1962, 300 с.
60. A. Erdélyi et al. HTF, N.Y. McGraw-Hill Book Co., v. I, 1953 (рус. пер.: Г. Бейтмен, А. Эрдейи. ВТФ, т. I. М.: «Наука», 1974, 296 с.).
61. E. T. Whittaker, G. N. Watson. A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952 (рус. пер.: Э. Уиттекер, Г. Ватсон. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963, т.2, с.93).
62. P. Appel, M. J. Kampé de Fériet. Functions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Gautier-Villars. 1926, 420 p.
63. R. J. Eden. High energy collisions of elementary particles. Cambridge University Press, 1967 (рус. пер.: Р. Иден. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. М., «Наука», 1970, 392 с.).
64. P. D. B. Collins, E. I. Squires. Regge poles in particle physics. Springer-Verlag, Berlin - New York, 1968 (рус. пер.: П. Коллинз, Ю. Сквайрс. Полюса Редже в физике частиц. М., «Мир», 1971, 352 с.).
65. E. C. Titchmarsh. The Theory of Functions, 2<sup>nd</sup> edition. Oxford University Press, 1939 (рус. пер.: Е. К. Титчмарш. Теория функций. изд. 2, М., «Наука», 1980, 464 с.).
66. a) **И. Р. Ломидзе, Дж. И. Джавахишвили**. Применение ортогональных инвариантов трехмерных операторов для решения некоторых физических задач, Сообщ. ОИЯИ P5-2007-31, Дубна, 2007, 36 с.  
 b) **I. Lomidze, J. Javakhishvili**. Application of the Orthogonal Invariants of Three-Dimensional Operators in Some Hydrodynamical Problems. Reports of Enlarged Session of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics, v.22, Tbilisi University Press, 2008, Tbilisi, p. 67-73.

67. **И. Р. Ломидзе.** О некоторых свойствах матрицы Вандермонда. Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ ТГУ им. И. Н. Векуа, т.2, №3, Тбилиси, 1986, с. 69-72.
68. D. Hilbert. Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann., **36**, 1890, 473-534.
69. D. Hilbert. Über die vollen Invariantensysteme. Math. Ann., **42**, 1893, 313-373.
70. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М., ГИИЛ, 1947, 408 с.
71. C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. Amer.J.Math., **77**, 1955, p. 778-782.
72. G. C. Shepard, J.A.Todd. Finite unitary reflection groups. Canad.J.Math., **6**, 1954, p. 274-304.
73. J. A. Dieudonne, J. B. Carrell. Invariant Theory, Old and New. Academic Press, New York - London, 1971; D. Mumford. Geometric Invariant Theory. Berlin, Springer, 1965 (рус. пер. в кн.: Ж. Дьедонне, Дж. Керролл, Д. Мамфорд. Геометрическая теория инвариантов. М., «Мир», 1974, с.125-256).
74. Н-Р. Kraft. Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. Friedr. Vieweg & Sohn. Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1985 (рус. пер. с доб.: Х. Крафт. Геометрические методы в теории инвариантов, п/ред. В. Л. Попова. М., «Мир», 1987, 312 с.).
75. Ph. Griffiths, J. Harris. Principles of algebraic geometry, Wiley (Interscience), Inc., New York, 1978 (рус. пер.: Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии, т.1,2. М., «Мир», 1990, 864 с.).
76. E. Artin. Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957 (рус. пер.: Э. Артин. Геометрическая алгебра, М., «Наука», 1969, 284 с.).
77. А. Г. Элашвили. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли. Функц. анализ и прил., **6**, №1, 1972, с. 51-62.
78. А. Г. Элашвили. Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли. Функц. анализ и прил., **6**, №2, 1972, с. 65-78.
79. G. Schwarz. a) Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants. Invent. Math. **49**, 1978, p.167-191.  
b) Representations of simple Lie groups with a free module of covariants. Invent. Math. **50**, 1978, p.1-12
80. G. Schwarz. Lifting smooth homotopies of orbit spaces, Publ. Math. IHES, **51**, 1980, pp. 37-135.
81. А. Н. Зубков. Подъем инвариантов классических групп, Вест. ОмГУ, Омский ГУ, вып.2, 1996, с.11-13.
82. Э. Б. Винберг. Сложность действий редуцированных групп. Функц. Анализ и прил., **20**, №1, 1986, с.1-13.
83. T. Springer. Invariant Theory, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977 (рус. пер. с доп., п/ред. В. Л. Попова: Т. Спрингер. Теория инвариантов, Серия: Мат., новое в зарубежной науке, **24**, М., «Мир», 1981, 192 с.).
84. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия, М., «Наука», ч.1 и 2, 1979, 726 с; ч.3, 1984, 344 с.
85. А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Курс диф. геометрии и топологии, М., изд-во МГУ, 1980, 488 с.
86. А. Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. Методы и приложения, М., изд-во МГУ, 1988, 413 с.
87. А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, Докл. АН СССР, **231**, №3, 1976, с. 536-538.
88. В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем, Функц. анализ и его прилож., **17**, 1, 1983, с. 31-39.
89. С. В. Манаков. Замечания об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела, Функц. анализ и его прилож., **10**, 4, 1976, с. 93-94.
90. А. Т. Fomenko. The integrability of some Hamiltonian systems, Ann. of global Analysis and Geometry, **1**, №2, 1983, p.1-10.
91. Дж. И. Джавахишвили, **И. Р. Ломидзе**, Г. Н. Мамисашвили. К вопросу о нестационарной интерференции волновых пакетов. Сообщ. АН Грузии, **148**, №3, 1993, с. 28-31.
92. J. Javakhishvili, **I. Lomidze**, D. Karkashadze, On the transportation of Energy-Momentum in non stationary interference and scattering of electromagnetic waves, in: Proceedings of XXV-th General Assembly of IURS, B9.17, Lille (France), 1997. p. 84.



93. J. Javakhishvili, **I. Lomidze**, D. Karkashadze, G. Kervalishvili, G. Khutsishvili. Necessity of accounting static fields in nonstationary interference of electromagnetic impulses, *Сообщения АН Грузии*, **158**, №2, 1998, გვ. 233-236.
94. **I. Lomidze**, D. Karkashadze, J. Javakhishvili. Relativistic rotation and classic electrodynamics validity limit, *DIPED-2005 Proceed., IEEE X<sup>th</sup> Int. Seminar/Workshop, Lviv, 2005*, p.122-126.
95. a) ნ. ჩახავა. **ი. ლომიძე**. რელატივისტურად მბრუნავი რგოლის დინამიკა. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახ. უნივერსიტეტის 90-ე წლისთავისადმი მიძღვნილი სამეცნიერო კონფერენცია ფიზიკაში, თეზისები, თბილისი, 2008, გვ. 17.  
b) N. Chachava, **I. Lomidze**. Dynamics of relativistic rotating ring. <http://www.phys08.tsu.ge>
96. **И. Р. Ломидзе**. О разрешимости одной системы линейных алгебраических уравнений. *ოსე შრომები*. ტ. **253**, №18, ფიზიკა. თბილისი, 1985, გვ. 152-159.
97. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., «Наука», 7-изд., т. I, 1970, 608 с; т. II, 1969, 800 с. (n°n° 396-398),
98. И. Н. Векуа. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., «Наука», 1978, 296 с.
99. G. Andrews. The Theory of Partitions. *Encyclopedia of Math. Sci.*, **2**, Addison-Wesley, Inc., 1976 (რუს. პერ.: Г. Эндриус. Теория разбиений. М., «Наука», 1982, 256 с.).
100. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. ТФ, т. II, Теория поля. 7-е изд., М., «Наука», 1988, 512 с.
101. Б. П. Косяков. Излучение в электродинамике и теории Янга-Миллса. *УФН*, **162**, №2, 1992, с. 161-177.
102. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. ТФ, т. VI, Гидродинамика. 3-е изд., переработ., М., «Наука», 1986, 736 с.
103. J.A.Schouten. Tensor Analysis for Physicists. Oxford, at the Clarendon Press, 1951 (რუს. პერ.: Я. А. Схоутен. тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965, 456 с.).
104. გ. ჭილაშვილი. ტენზორული აღრიცხვა, მე-2 გამოც., თბილისი, “მეცნიერება”, 1982, 300 გვ.
105. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Строение и эволюция вселенной. М., «Наука», 1975, 736 с.
106. И.Ш.Вашакидзе, Г.А.Чилашвили. Релятивистское уравнение Шрёдингера со спин-орбитальным взаимодействием. *Сообщения АН Груз.ССР*, **129**, №2, 1988, с.297-300.
107. I. Vashakidze, K. Hana, **I. Lomidze**, A. Bischani, N. Chitaia. Relativistic single-particle states and spin-orbital splittings in nucleus, *ოსე შრომები*, **296**, ფიზიკა, **30**, 1990, გვ. 55-66.
108. I. Vashakidze, K. Hana, N. Chitaia, A. Bischani, T. Jalagania. Relativistic tensor effects in nuclear single-particle states, *ოსე შრომები*, **296**, ფიზიკა, **30**, 1990, გვ. 67-85.
109. K. Hana, I. Vashakidze, **I. Lomidze**, A. Bischani. Energy Spectrum and Singular Potentials in Quantum Mechanics. *Proceed. of the 4-th Nat. Conf., Cairo, 28-30 Nov., 1992*.
110. M. Born. Quantenmechanik der Stossvorgänge, *Zs.Phys.* **38**, 1926, s. 803-827.
111. R. Pielrs. Surprises in Theoretical physics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979 (რუს. პერ.: Р. Пайерлс. Сюрпризы в теоретической физике, М., «Наука», 1988, 176 с.).
112. А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов. Квантовая электродинамика, М., изд-во МГУ, 1983, 312 с.
113. Ф. А. Березин, Г. И. Кац. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими переменными. *Матем. сб.*, **т.82**, в.3, 1970, с.343–358.
114. a) Е. П. Лихтман. Неприводимые представления расширения алгебры генераторов группы Пуанкаре биспинорными генераторами, *Препринт ФИАН №41*, М., 1971 (в *УФН* **171**, №9, 2001, с. 1028-1032).  
b) Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности. *Письма в ЖЭТФ*, **13**, №8, 1971, с.452–455.
115. D. V. Volkov, V. P. Akulov. Is the neutrino a goldstone particle? *Phys. Lett.*, **46B**, №1, 1973, p.109-110.
116. J. Wess, B. Zumino. a) Supergauge transformations in four dimensions, *Nucl. Phys.*, **B70**, №1, 1974, p.39-50.  
b) A lagrangian model invariant under supergauge transformations, *Phys. Lett.*, *Bd.***49**, 1974, p.52-54.
117. L. Corwin, Y. Ne'eman, S. Sternberg. Graded Lie algebras in mathematics and physics. *Rev. Mod. Phys.*, **v.47**, 1975, p. 573–603.

118. T.T. Khachidze, A.A. Khelashvili. An “accidental” symmetry operator for the Dirac equation in the Coulomb potential, *Mod. Phys. Lett.* **A20**, 2005, p. 2277-2282.
119. N.P. Chitaia, S.A. Gogilidze, Yu.S. Surovtsev. *a)* Dynamical Systems with First- and Second-Class Constraints. I. Separation of Constraints into First & Second Classes. *Phys. Rev. D*, **56**, №2, 1997, p. 1135-1141.  
*b)* Dynamical Systems with First- and Second-Class Constraints. II. Local-Symmetry Transformations. *Phys. Rev. D*, **56**, №2, 1997, p. 1142-1155.
120. В. П. Павлов. Канонические преобразования для систем со связями. *ТМФ*, **104**, №2, 1995, с.304-309.
121. N.P. Chitaia, S.A. Gogilidze, A.A. Khelashvili. *ISPM*, Tbilisi, Georgia: sept 5-18, 1998.
122. Д. П. Желобенко. К решению одной задачи о полиномиальных инвариантах, *УМН*, **18**, 6, 1963, с.193-196.
123. R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960 (рус. пер.: Р. Беллман. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969, 368 с.).
124. А. Г. Курош. *Курс высшей алгебры*, изд. 8. М., «Наука», 1965, 432 с.
125. А. И. Мальцев. *Основы линейной алгебры*, изд. 4, М., «Наука», 1975, 400 с.
126. Н. А. Лебедев, В. И. Смирнов. *Конструктивная теория функций комплексной переменной*. М., «Наука», 1964, 368 с.
127. Р. Курант. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, изд. 2 (пер. с 3-го немецкого и английского изданий, Springer-Verlag, 1945-1961). М., «Наука», т. I, 1967, 704 с; т. II, 1970, 672 с.
128. R. Gorenflo, F. Mainardi. *Fractional calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, chapter in: A. Carpinteri and F. Mainardi (editors): *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mech.* Springer-Verlag, Wien - New York, 1997, pp. 223-276.
129. N. Makhaldiani. *Fractal Geometry and Calculus with some Applications*, in: *Proceedings of Int. Symposium on Math. Methods in Engineering*, Sankaya University, Ankara–Turkey, 2006, CD ISBN number: 975-6734.
130. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М., «Наука», 1974.
131. P. Lancaster. *Theory of Matrices*. Academ. Press, New York - London, 1969 (рус. пер.: П. Ланкастер. *Теория матриц*. М., «Наука», 1982, 272 с.).
132. M. Abramowitz, I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. NBS, 1964, (рус. пер.: М. Абрамовиц, И. Стиган. *Справочник по специальным функциям*. М.: «Наука», 1979, 832 с.).
133. S. Yu. Slavyanov, W. Lay. *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford; New York: Oxford Univ. Press, 2000 (рус. пер.: С. Ю. Славянов, В. Лай. *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей*. С-Пб.: Невский Диалект, 2002, 312 с.).
134. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.  
*a)* *Интегралы и ряды*. М.: «Наука», 1981, 800 с.  
*b)* *Интегралы и ряды. Специальные функции*. М.: «Наука», 1983, 752 с.  
*c)* *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*. М.: «Наука», 1986, 800 с.
135. G. Lauricella. *Sulle Funzioni Ipergeometriche à Piu Variabili*. *Rendiconti Circ. Math. Palermo*, **t.VII**, 1893, p.111-158.
136. M. R. Le Vavasseur. *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique de deux variables  $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$* . Thèse (Paris, 1893), p. 8 et p. 11-12.
137. H. J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. The Math. Association of America, 1963 (рус. пер.: Г. Дж. Райзер. *Комбинаторная математика*. М., «Мир», 1966, 156 с.).
138. ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი. თეორიული ფიზიკა, ნაწ. I, მექანიკა, მე-2 გამოცემა. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1982, 336 გვ.
139. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *ТФ*, т. I, *Механика*, 4-е изд., испр., М., «Наука», 1988, 216 с.
140. Н. Г. Четаев. *Теоретическая механика*. М., «Наука», 1987, 368 с.
141. Л. И. Седов, А. Г. Цыпкин. *Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма*. М., «Наука», 1989, 272 с.

142. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. ТФ, т. VII, Теория упругости, 4-е, изд., исправл. и дополн., М., «Наука», 1987, 248 с.
143. N. Chikhradze, L. Japaridze, A. Peikrishvili, Z. Chikviladze, **I. Lomidze**. Theoretical Calculations of the Stressed-Deformed State of Powder Materials, <http://www.mpif.org/pubs/2002contents.html>
144. N. Chikhradze, L. Japaridze, A. Peikrishvili, **I. Lomidze**. Calculation of components of stress tensor under the axisymmetric dynamic compression of the sample by the pressure impulse of cylindrical symmetry. In.: Dynamic of Granulated & Powder Materials. F. Marquis, K. Staudhammer edd., 2001, p. 216-238.
145. G. Z. Machabeli, A. D. Rogava. Centrifugal force: A Gedanken experiment. Phys.Rev. A, **50**, №1, 1994, p. 98-103.
146. V. Bashkov, M. Malakhaltsev. Geometry of rotating disk and the Sagnac effect. <http://arXiv.org/gr-qc/0011061v1> 18 nov 2000, p.1-5.
147. B. H. Lavenda. Hyperbolic nature of uniformly rotating systems and their relation to gravity. <http://arXiv.org/gr-qc/08041674v1> 10 Apr 2008, p.1-8.
148. Дж. И. Джавахишвили, Н. Л. Цинцадзе. Явления переноса в полностью ионизованной ультрарелятивистской плазме. ЖЭТФ, т. **64**, №4, 1973, с.1314-1325.
149. E.G. Tsikarishvili, J.G. Lominadze, A.D. Rogava, J.I. Javakhishvili. General-relativistic hydrodynamics of collisionless relativistic plasma in a strong magnetic field. Phys.Rev., **A, v. 46**, №2, 1992 p.1078-1083.
150. E.G. Tsikarishvili, J.G. Lominadze, J.I. Javakhishvili. Hydrodynamics of collisionless relativistic plasma with pressure anisotropy. Phys.Plasmas, **v. 1**, №1, 1994, p.150-156.
151. **ო. ლომიძე**. განტოლების ამოხსნა რადიკალებში, კრ. “მთიები”, ნაკადული, 1988, გვ. 43-63.
152. Л. В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1978, 400 с.
153. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, 2-е изд., (Серия: «курс высшей математики и математической физики»), М., «Наука», 1969, 424 с.
154. И.А.Климишин. Релятивистская астрономия. 2-е изд., перераб. и доп., М., «Наука», 1989, 288 с.